ESAME SCRITTO DI FISICA MODERNA

24 luglio 2012

Tempo massimo 3 ore. Non sono ammessi libri o appunti

Considerare una particella vincolata a muoversi su un segmento di lunghezza L, cioè soggetta al potenziale

$$V_0(x) = \begin{cases} \infty \text{ se } |x| > \frac{L}{2} \\ 0 \text{ se } |x| \leq \frac{L}{2} \end{cases} \tag{1}$$

(1) Determinare il valor medio e l'indeterminazione di posizione ed impulso nell'n-esimo autostato dell'hamiltoniana
Suggerimento: Ricordare gli integrali (per n intero)

$$\int_{-L/2}^{L/2} \sin^2\left(\frac{\pi n x}{L}\right) dx = \int_{-L/2}^{L/2} \cos^2\left(\frac{\pi n x}{L}\right) dx = \frac{L}{2};$$

$$\int_{-L/2}^{L/2} x^2 \sin^2\left(\frac{\pi n x}{L}\right) dx = \frac{L^3}{24}\left(1 - (-1)^n \frac{6}{n^2\pi^2}\right);$$

$$\int_{-L/2}^{L/2} x^2 \cos^2\left(\frac{\pi n x}{L}\right) dx = \frac{L^3}{24}\left(1 + (-1)^n \frac{6}{n^2\pi^2}\right)$$

(2) Supporre che il sistema sia stato preparato al tempo $t = 0$ in uno stato tale per cui una misura di energia può solo dare il valore dell'energia corrispondenti allo stato fondamentale, oppure al primo stato eccitato, con eguale probabilità. Scrivere nella base delle coordinate la più generale funzione d'onda $\langle x|\psi\rangle$ per il sistema dato e dimostrare che essa dipende da un unico parametro libero α. Utilizzare tale funzione d'onda per determinare la matrice densità $\langle x|\rho|y\rangle$ del sistema. Scrivere inoltre la matrice densità dopo che sullo stato è stata eseguita una misura di energia.

(3) Determinare il parametro α definito al punto precedente imponendo (al tempo $t = 0$, prima della misura di energia) la condizione che

$$\langle p\rangle = \frac{4\hbar}{3L}. \tag{2}$$

(4) Considerare la funzione d'onda del sistema del punto precedente ad un tempo qualunque, e determinare il valore del tempo $t = t_0$ tale che il valor medio dell'impulso sia $\langle p\rangle(t_0) = 0$.

(5) Si supponga ora che il potenziale sia dato da

$$V(x) = V_0(x) - \frac{\hbar^2 g^2}{2m}\delta(x), \tag{3}$$

dove $V_0(x)$ è dato dalla Eq. (1), $\delta(x)$ è la delta di Dirac e g è una costante reale. Dimostrare che tutte le autofunzioni associate ad autovalori dispari di energia (cioè il primo, terzo, quinto, ecc. stato eccitato) del sistema soggetto al potenziale Eq. (1) sono autofunzioni anche del sistema soggetto al potenziale Eq. (3), e determinarne l'energia.

(6) Dimostrare che se il potenziale ha la forma Eq. (3) esiste anche un'autofunzione associata ad un autovalore di energia negativo. Dimostrare dapprima che la più generale autofunzione associata ha la forma

$$\psi(x) = \begin{cases} A \sinh \kappa(x + L/2) \text{ se } -L/2 < x < 0 \\ B \sinh \kappa(x - L/2) \text{ se } 0 < x < L/2 \end{cases} \tag{4}$$

e determinare il valore delle costanti κ, A e B. Determinare infine qual è la condizione sulla costante g perchè esista un'autofunzione di energia negativa.