ESAME SCRITTO DI FISICA MODERNA

20 luglio 2016

Tempo massimo 3 ore. Non sono ammessi libri o appunti

Considerare una particella di massa m vincolata a muoversi su un segmento di lunghezza L, cioè soggetta al potenziale

$$V_0(x) = \begin{cases} \infty & \text{se } |x| > L \\ 0 & \text{se } |x| \le L \end{cases} \tag{1}$$

Siano $|1\rangle$ lo stato fondamentale, $|2\rangle$ il primo stato eccitato, $|3\rangle$ il secondo, e così via.

(1) Supporre che il sistema si trovi nello stato

$$|\psi_0\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}}|1\rangle + i\sqrt{\frac{2}{3}}|2\rangle. \tag{2}$$

Determinare i valori medi degli operatori x, p ed H.
Suggerimento: Ricordare gli integrali

$$\begin{aligned} &\int_{-L}^{L} x \sin\frac{x\pi}{L}\cos\frac{x\pi}{2L}\,dx = \frac{32L^2}{9\pi^2} \\ &\int_{-L}^{L} \sin\frac{x\pi}{L}\sin\frac{x\pi}{2L}\,dx = 2\int_{-L}^{L}\cos\frac{x\pi}{L}\cos\frac{x\pi}{2L}\,dx = \frac{8L}{3\pi} \end{aligned} \tag{3}$$

(2) Considerare i seguenti stati

$$|\psi_1\rangle = |2\rangle, \tag{4}$$

$$|\psi_2\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|2\rangle + i|4\rangle\right), \tag{5}$$

$$|\psi_3\rangle = |3\rangle, \tag{6}$$

e gli elementi di matrice

$$M_{ij} = \langle\psi_i|x^2|\psi_j\rangle, \tag{7}$$

con $i, j = 1, 2, 3$. Determinare quali tra i nove elementi di matrice Eq. (7) sono uguali a zero.

(3) *Domanda di teoria:* Determinare lo spettro degli autovalori di energia per un sistema soggetto al potenziale Eq. (1). Discutere in particolare le condizioni al contorno (o raccordo) a $x = \pm L$, confrontando tali condizioni quando il valore del potenziale per $|x| > L$ è finito o infinito.

(4) Determinare il valore medio dell'operatore p ad ogni tempo t per un sistema che al tempo $t = 0$ si trova nello stato $|\psi_0\rangle$ Eq. (2).

(5) Supporre ora che fino al tempo $t = 0$ compreso il potenziale sia dato dalla Eq. (1), ma a partire dal tempo $t > 0$ il potenziale diventi

$$V_1(x) = \begin{cases} \infty & \text{se } x < 0 \text{ oppure } x > L \\ 0 & \text{se } 0 \le x \le L. \end{cases} \tag{8}$$

Quali delle autofunzioni dell'hamiltoniana per $t < 0$ sono anche autofunzioni della hamiltoniana per $t > 0$? Utilizzare il risultato per determinare lo spettro di un sistema soggetto al potenziale Eq. (8). Confrontare questo spettro con lo spettro di un sistema soggetto al potenziale V_0 Eq. (1), ma con L sostituito da $L/2$ nella Eq. (1).

(6) Si supponga che una misura di energia eseguita sul sistema al tempo $t = 0$ lo riveli nello stato fondamentale relativo al potenziale Eq. (1). Determinare l'ampiezza di transizione $c_n(t) = \langle n'(t)|1\rangle$ tra lo stato $|1\rangle$ in cui il sistema si trova a $t = 0$ e l'n-esimo autostato $|n'\rangle$ dell'hamiltoniana per ogni $t > 0$
Suggerimento: Ricordare la formula di Werner: $\sin\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}\left[\sin(\alpha+\beta) + \sin(\alpha-\beta)\right]$

(7) Determinare $\sum_{i=1}^{\infty} |c_n|^2$, dove c_n sono le ampiezze definite al punto precedente, e discutere il risultato.
Suggerimento: Ricordare le somme

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2 - 1/4} = 2; \qquad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\left(k^2 - 1/4\right)^2} = \pi^2 - 8.$$