ESAME SCRITTO DI FISICA MODERNA

11 settembre 2008

Tempo massimo 3 ore. Non sono ammessi libri o appunti

Si consideri un sistema unidimensionale soggetto al potenziale

$$V(x) = \begin{cases} 0 \text{ se } |x| \le a \\ \infty \text{ se } |x| > a \end{cases}, \tag{1}$$

dove a è una costante reale positiva (buca infinita).

(1) Siano dati i seguenti stati del sistema:

$$|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(|1\rangle + i|2\rangle\right), \tag{2}$$

$$|\varphi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(|2\rangle + i|4\rangle\right), \tag{3}$$

dove $|1\rangle$ è lo stato fondamentale, $|2\rangle$ il primo stato eccitato e così via.
Scrivere le funzione d'onda per gli stati $|\psi\rangle$ e $|\varphi\rangle$ nella base delle coordinate.
Determinare quindi i seguenti valori medi: $\langle\psi|p|\psi\rangle$, $\langle\psi|H|\psi\rangle$, $\langle\varphi|p|\varphi\rangle$, $\langle\varphi|H|\varphi\rangle$, dove p e H sono rispettivamente gli operatori impulso e hamiltoniana.
Suggerimento: Ricordare gli integrali seguenti

$$\int_{-a}^{a} \sin^2 \frac{x\pi}{a}\, dx = \int_{-a}^{a} \sin^2 \frac{x\pi}{2a}\, dx = \int_{-a}^{a} \cos^2 \frac{x\pi}{2a}\, dx = a$$

$$\int_{-a}^{a} \sin \frac{x\pi}{a} \sin \frac{x\pi}{2a}\, dx = 2\int_{-a}^{a} \cos \frac{x\pi}{a} \cos \frac{x\pi}{2a}\, dx = \frac{8a}{3\pi}$$

$$\int_{-a}^{a} \sin \frac{x\pi}{a} \cos \frac{x\pi}{2a}\, dx = \int_{-a}^{a} \cos \frac{x\pi}{a} \sin \frac{x\pi}{2a}\, dx = 0$$

(2) Si supponga che il sistema si trovi nello stato $|\varphi\rangle$ eq. (3). Si esegua una misura di energia oppure di impulso sul sistema. Determinare i risultati di queste misure e le rispettive probabilità.

(3) Determinare i valori medi di impulso ed energia a qualunque tempo t, supponendo che al tempo $t = 0$ esso si trovi nello stato $|\psi\rangle$ eq. (2) oppure nello stato $|\varphi\rangle$ eq. (3). Giustificare la dipendenza od indipendenza dal tempo di questi valori medi.

(4) Si supponga che il sistema si trovi nello stato $|\varphi\rangle$ eq. (3) (come al punto (2)). Si scriva la matrice densità del sistema al tempo t. Quali sono i risultati di una misura di impulso al tempo t e le rispettive probabilità? Scrivere la matrice densità dopo la misura.

(5) Al tempo $t = t_0$ le pareti della buca si spostano da $x = \pm a$ a $x = \pm 2a$, ovvero il potenziale diventa

$$V(x) = \begin{cases} 0 \text{ se } |x| \leq 2a \\ \infty \text{ se } |x| > 2a \end{cases} . \tag{3}$$

Si definisca l'operatore parità $\mathcal{P}$, che agisce come

$$\langle x|\mathcal{P}|\psi\rangle = \langle -x|\psi\rangle \qquad (4).$$

Mostrare se gli autovalori di $\mathcal{P}$ siano conservati o no per ogni tempo t.

(6) Si supponga di eseguire una misura di energia sul sistema al tempo $t = t_0 - \epsilon$ (cioè subito prima dello spostamento della parete) e di avere trovato come risultato $E = \frac{\hbar^2\pi^2}{8ma^2}$. Utilizzando il risultato della domanda precedente, determinare la probabilità che al tempo $t > t_0$ una seconda misura riveli il sistema nello stato $\overline{|2n\rangle}$, dove $\overline{|n\rangle}$ sono le autofunzioni della hamiltoniana al tempo $t > t_0$ (cioè $\overline{|1\rangle}$ è lo stato fondamentale della hamiltoniana dopo lo spostamento delle pareti, $\overline{|2\rangle}$ il primo stato eccitato e così via).

(7) Nella situazione della domanda precedente, si determini la probabilità che la seconda misura riveli il sistema in un autostato $\overline{|n\rangle}$ qualunque.