ESAME SCRITTO DI FISICA MODERNA

21 settembre 2010

Tempo massimo 3 ore. Non sono ammessi libri o appunti

Si consideri un sistema unidimensionale soggetto al potenziale

$$V(x) = \frac{1}{2} m\omega^2 x^2 \tag{1}$$

con ω una costante reale positiva.
Si supponga che al tempo $t = 0$ il sistema si trovi nello stato $|\psi\rangle$, la cui funzione d'onda nella base delle posizioni è

$$\langle x|\psi\rangle = \left(\frac{\gamma}{\pi}\right)^{1/4} e^{-\frac{1}{2}\gamma x^2}, \tag{2}$$

dove γ è una costante reale positiva, in generale diversa da ω; lo stato dato soddisfa la condizione di normalizzazione $\langle\psi|\psi\rangle = 1$.

(1) Determinare i valori medi degli operatori x, p, x^2 e p^2 nello stato dato.
Suggerimento: Ricordare l'integrale

$$\int_{-\infty}^{\infty} x^2 e^{-\gamma x^2}\, dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2\gamma^{3/2}}.$$

(2) Determinare la dipendenza temporale degli operatori posizione ed impulso alla Heisenberg per il sistema dato (usando un metodo a scelta).

(3) Dimostrare che nello stato dato al tempo $t = 0$ l'operatore

$$O \equiv xp + px$$

ha valor medio $\langle O\rangle = 0$.

(4) Determinare il valor medio degli operatori x, p, x^2 e p^2 per il sistema dato a qualunque tempo t.

(5) Determinare la probabilità che una misura di energia del sistema dato dia come risultato l'energia del suo stato fondamentale. Determinare nuovamente i valori medi della domanda precedente ad ogni tempo t se questa misura viene effettuata con questo risultato al tempo $t = 0$.

(6) Calcolare il prodotto delle indeterminazioni di posizione ed impulso per il sistema dato a qualunque tempo t. Mostrare che esiste un valore di γ che minimizza tale prodotto a qualunque tempo t e determinare tale valore. Giustificare il risultato.