ESAME SCRITTO DI FISICA MODERNA

25 settembre 2012

Tempo massimo 3 ore. Non sono ammessi libri o appunti

Considerare una particella libera di massa m in una dimensione, la cui funzione d'onda al tempo $t = 0$ nella base delle coordinate è data da

$$\langle x|\psi\rangle = Nf(x), \tag{1}$$

dove

$$f(x) \equiv e^{ik_0 x} e^{-\alpha x^2/2}; \qquad N \equiv \left(\frac{\alpha}{\pi}\right)^{\frac{1}{4}}, \tag{2}$$

e α e k_0 sono numeri reali positivi.

(1) Determinare i valori medi degli operatori posizione ed impulso e le loro indeterminazioni nello stato dato.

(2) Determinare i valori medi degli operatori posizione ed impulso e le loro indeterminazioni a qualunque tempo successivo t.

(3) Sviluppare la funzione d'onda del sistema su una base di autofunzioni dell'energia, e scriverne l'espressione a qualunque tempo t.

(4) Dimostrare che la funzione d'onda al tempo t si può scrivere come

$$\psi(x,t) = e^{i\lambda(t)} \bar{N} \bar{f}(x,t), \tag{3}$$

dove la fase $\lambda(t)$ è una funzione reale del tempo e dei parametri del problema,

$$\bar{N} = \frac{N}{\sqrt{z(t)}}, \tag{4}$$

e $\bar{f}(x,t)$ si ottiene dalla funzione $f(x)$ Eq. (2) mediante le due sostituzioni

$$x \to x(t) \equiv x - \frac{\hbar k_0}{m} t; \qquad \alpha \to \alpha(t) \equiv \frac{\alpha}{z(t)}, \tag{5}$$

dove $z(t)$ è una funzione complessa del tempo e dei parametri del problema. Determinare le funzioni $\lambda(t)$ e $z(t)$.

(5) Scrivere la densità di probabilità dei risultati di una misura di posizione al tempo t, ed utilizzare il risultato per determinare l'indeterminazione in posizione ad ogni tempo, confrontando con il risultato della domanda (2).

(6) Determinare il valor medio dell'operatore $i\hbar\frac{\partial}{\partial t}$ nello stato in cui il sistema si trova al tempo t.

(7) Determinare la densità di probabilià di posizione nel limite $\alpha \to \infty$ sia al tempo $t = 0$ che a qualunque altro tempo t. Commentare il risultato alla luce del principio di indeterminazione. -