ESAME SCRITTO DI FISICA MODERNA

25 settembre 2014

Tempo massimo 3 ore. Non sono ammessi libri o appunti

Considerare un sistema unidimensionale la cui dinamica è descritta dall'hamiltoniana

$$H_0 = \hbar\omega \left(a^\dagger a + \frac{1}{2} \right), \tag{1}$$

dove ω è una costante reale e positiva e a è un operatore tale che (in rappresentazione di Schrödinger)

$$\left[a, a^\dagger\right] = 1. \tag{2}$$

(1) Risolvere le equazioni del moto alla Heisenberg per l'operatore $a(t)$ e calcolare il commutatore $\left[a(t), a^\dagger(t')\right]$.

(2) Supporre che al tempo $t = 0$ il sistema si trovi nello stato

$$|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(1 + a^\dagger\right) |0\rangle, \tag{3}$$

dove $|0\rangle$ è lo stato fondamentale dell'hamiltoniana Eq. (1). Determinare la probabilità che al tempo t una misura eseguita sul sistema lo riveli nello stato

$$|\phi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(1 - a^\dagger\right) |0\rangle. \tag{4}$$

(3) Considerare l'operatore posizione

$$x = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}} \left(a + a^\dagger\right) \qquad (5).$$

Calcolare l'indeterminazione $\Delta^2 x(t)$ al tempo t per un sistema che al tempo $t = 0$ si trova nello stato $|\psi\rangle$ Eq. (3).

(4) Considerare ora anche l'operatore impulso

$$p = -i\sqrt{\frac{\hbar m\omega}{2}} \left(a - a^\dagger\right). \tag{6}$$

Se al tempo t viene eseguita una misura dell'operatore posizione, e ad un tempo successivo t' viene eseguita una misura dell'operatore impulso, qual è la minima indeterminazione della seconda misura?

(5) Considerare ora il caso in cui l'hamiltoniana è data da

$$H(t) = H_0 - F(t)x, \tag{7}$$

dove H_0 è l'hamiltoniana Eq. (1), x è l'operatore posizione Eq. (5) e $F(t)$ è una funzione a valori reali. Determinare lo spettro di autovalori dell'hamiltoniana Eq. (7) al tempo t.
Suggerimento: Porre $\bar{a} = a + \kappa$, dove κ è una costante reale, e scegliere la costante κ in modo opportuno.

(6) Supporre che

$$F(t) = \lambda\Theta(t)e^{-t}, \tag{8}$$

dove λ è una costante reale positiva, e Θ è la funzione a gradino (funzione di Heaviside)

$$\Theta(t) = \begin{cases} 0 & t \leq 0; \\ 1 & t > 0. \end{cases} \tag{9}$$

Una misura di energia ad un tempo $t_0 < 0$ rivela il sistema nello stato fondamentale della hamiltoniana Eq. (7-8) al tempo t_0. Qual è la probabilità che una misura di energia eseguita al tempo $t = \infty$ riveli il sistema nel primo stato eccitato dell'hamiltoniana Eq. (1) al tempo $t \to \infty$?
Suggerimento: Risolvere le equazioni del moto alla Heisenberg per l'operatore a.