ESAME SCRITTO DI FISICA MODERNA

28 novembre 2008

Tempo massimo 3 ore. Non sono ammessi libri o appunti

(1) Si consideri un sistema unidimensionale la cui funzione d'onda nella base delle coordinate è data da

$$\langle x|\psi\rangle = N\left(e^{ikx}e^{-\frac{\alpha}{2}(x+x_0)^2} + e^{-ikx}e^{-\frac{\alpha}{2}(x-x_0)^2}\right), \tag{1}$$

dove N è una costante di normalizzazione determinata dalla condizione $\langle\psi|\psi\rangle = 1$. Si determinino i valori medi della posizione e dell'impulso nello stato $|\psi\rangle$. Che cosa rappresenta fisicamente questo stato?

(2) Si supponga ora che il sistema si trovi nello stato $|\psi\rangle$ eq. (1), ma con $x_0 = 0$. Si calcolino l'indeterminazione di posizione ed impulso. Lo stato dato è di minima indeterminazione?

Suggerimento: si ricordino gli integrali

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{\infty} dx\, e^{2ikx}e^{-\alpha x^2} &= \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}e^{-\frac{k^2}{\alpha}} \\
\int_{-\infty}^{\infty} dx\, xe^{2ikx}e^{-\alpha x^2} &= \frac{ik}{\alpha}\sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}e^{-\frac{k^2}{\alpha}} \\
\int_{-\infty}^{\infty} dx\, x^2e^{2ikx}e^{-\alpha x^2} &= \frac{1}{\alpha}\left(\frac{1}{2}-\frac{k^2}{\alpha}\right)\sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}e^{-\frac{k^2}{\alpha}}
\end{aligned}$$

(3) Si supponga ora che il sistema si trovi nello stato $|\psi\rangle$ eq. (1), ma con $\alpha = 0$. Si scriva la densità di probabilità di posizione del sistema $\rho(t)$ al tempo t e se ne discuta la dipendenza temporale, supponendo che l'evoluzione temporale sia data dall'hamiltoniana di particella libera. Come cambierebbe il risultato se $\alpha \neq 0$? (non è necessario scrivere la soluzione completa in tal caso).

(4) Si supponga ora di eseguire una misura di impulso sul sistema nello stato $|\psi\rangle$ eq. (1): quali sono i possibili risultati della misura e le loro probabilità nel limite in cui $\alpha \to 0$? Se $\alpha = 0$ esattamente, qual è la forma della condizione di normalizzazione, e quanto vale la costante di normalizzazione?

(5) Supponendo di effettuare la misura di impulso del punto precedente al tempo $t = 0$, si determini il valor medio della posizione al tempo $t > 0$ nei due casi in cui l'hamiltoniana del sistema è data da (a) $H = \frac{p^2}{2m}$ oppure (b) $H = \frac{p^2}{2m} - \kappa x$ (con κ reale). Si determini inoltre l'indeterminazione dell'impulso in funzione del tempo.