PROVA IN ITINERE DI FISICA QUANTISTICA

23 gennaio 2025

Tempo massimo 3 ore. Non sono ammessi libri o appunti

Considerare un sistema unidimensionale la cui dinamica è data dalla hamiltoniana

$$H = \frac{p^2}{2m} + \kappa x, \tag{1}$$

dove x e p sono i consueti operatori posizione ed impulso, e κ è una costante reale positiva. Si supponga che al tempo $t = 0$ il sistema si trovi nello stato $|\psi\rangle$, la cui funzione d'onda nella base degli impulsi è

$$\langle p|\psi\rangle = A\psi_1(p) + B\psi_2(p) \tag{2}$$

dove

$$\psi_1(p) = \left(\frac{1}{\pi\sigma}\right)^{1/4} e^{-\frac{(p-p_0)^2}{2\sigma}}; \quad \psi_2(p) = \left(\frac{1}{\pi\sigma}\right)^{1/4} e^{-\frac{(p+p_0)^2}{2\sigma}}. \tag{3}$$

(1) Determinare il valore medio e l'indeterminazione dell'operatore p nello stato dato, nel caso in cui $A = 1$ e $B = 0$, e nel caso in cui $A = 0$ e $B = 1$.

(2) Determinare il valore medio e l'indeterminazione dell'operatore x nello stato dato, nel caso in cui $A = 1$ e $B = 0$, e nel caso in cui $A = 0$ e $B = 1$.

(3) Determinare il valore medio dell'operatore p nello stato dato, nel caso in cui $A = B = \frac{1}{\sqrt{2}}$, e nel caso in cui $A = \frac{1}{\sqrt{2}} = -B$.

(4) Nei due casi della domanda (3), determinare la probabilità che il risultato di una misura dell'operatore p dia come risultato $p = 0$ (notare che più propriamente si tratta di una densità di probabilità).

(5) Sempre nei due casi della domanda (3), determinare il valore medio dell'operatore p ad ogni tempo t.

(6) *Domanda di teoria:* Determinare gli elementi di matrice $\langle p|\hat{p}|\psi\rangle$, $\langle p|\hat{p}|p'\rangle$, $\langle p|\hat{x}|\psi\rangle$, $\langle p|\hat{x}|p'\rangle$, dove $|p\rangle$, $|p'\rangle$ sono autostati dell'operatore impulso e $|\psi\rangle$ è uno stato generico, supponendo nota la forma degli autostati dell'impulso nella base delle posizioni.

(7) Determinare le autofunzioni della hamiltoniana Eq. (1) nella base degli impulsi. Discutere se siano normalizzabili in senso proprio o improprio e determinare la costante di normalizzazione.

(8) Determinare la densità di probabilità che una misura di energia eseguita al tempo $t = 0$ sul sistema, nella situazione della domanda (3), dia come risultato uno specifico valore dell'energia E_0, e scrivere la funzione d'onda nella base degli impulsi per lo stato in cui si trova il sistema immediatamente dopo la misura.
È sufficiente scrivere il risultato sotto forma di integrale senza calcolare l'integrale.

(9) Determinare il valor medio dell'energia per un sistema che si trova nello stato Eq. (2) nel caso in cui $A = 1$, $B = 0$.

(10) Dimostrare che gli elementi di matrice dell'operatore di evoluzione temporale per il sistema dato hanno la forma

$$\langle p|S(t)|p'\rangle = \exp\left[\frac{t}{i\hbar}\frac{p^2}{2m}\right] \exp\left[\kappa t\frac{d}{dp}\right] \exp\left[\kappa t^2 \frac{p}{2im\hbar}\right] \exp\left[i\frac{\kappa^2 t^3}{3\hbar m}\right] \delta(p-p'). \tag{4}$$

Suggerimento: Ricordare la formula di Baker-Campbell-Hausdorff

$$e^{A+B} = e^A e^B e^{-\frac{1}{2}[A,B]} e^{\frac{1}{6}(2[B,[A,B]]+[A,[A,B]])}. \tag{5}$$

(11) Sfruttando il risultato della domanda precedente, determinare la funzione d'onda ad ogni tempo t per un sistema che al tempo $t = 0$ si trova nello stato Eq. (2) nel caso $A = 1$, $B = 0$.