PROVA IN ITINERE DI FISICA QUANTISTICA

7 febbraio 2025

Tempo massimo 3 ore. Non sono ammessi libri o appunti

Considerare un sistema la cui dinamica è descritta dall'hamiltoniana

$$H = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2 x^2. \tag{1}$$

Supporre che al tempo $t = 0$ il sistema si trovi nello stato $|\lambda\rangle$ tale che

$$a|\lambda\rangle = \lambda|\lambda\rangle, \tag{2}$$

dove

$$a = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}\left(x + \frac{ip}{m\omega}\right) \tag{3}$$

e λ è una costante reale positiva.

(1) Determinare il valore medio dell'operatore posizione x nello stato $|\lambda\rangle$ Eq. (2).

(2) Determinare il valore medio dell'operatore impulso p nello stato $|\lambda\rangle$ Eq. (2).

(3) Determinare l'indeterminazione della posizione nello stato $|\lambda\rangle$ Eq. (2).

(4) Scrivere e risolvere le equazioni di Heisenberg per gli operatori x e p per il sistema dato.

(5) Determinare il valor medio ad ogni tempo t degli operatori posizione e impulso per un sistema che al tempo $t = 0$ si trova nello stato $|\lambda\rangle$ Eq. (2).

(6) *Domanda di teoria:* Dimostrare che lo stato fondamentale dell'oscillatore armonico è uno stato di minima indeterminazione.

(7) Determinare i possibili risultati diversi da zero della misura dell'operatore

$$O = |0\rangle\langle 3| + |3\rangle\langle 0| \tag{3}$$

per un sistema che si trova nello stato

$$|\psi\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} c_n|n\rangle, \tag{4}$$

dove $|n\rangle$ è l'n-esimo autostato della hamiltoniana H Eq. (1) e le rispettive probabilità, in termini dei coefficienti c_n. Determinare inoltre in che stato si trova il sistema subito dopo la misura a seconda del suo risultato, sempre supponendo che il risultato della misura sia diverso da zero.

(8) Supporre che subito prima della misura il sistema si trovi nello stato $|\lambda\rangle$ Eq. (1). Determinare in questo caso la probabilità relativa che la misura al punto precedente dia l'uno o l'altro dei due possibili risultati diversi da zero (ossia il rapporto fra le due probabilità), determinando i valori dei coefficienti c_k. *Suggerimento:* sostituire l'espressione Eq. (4) per lo stato generico nell'Eq. (2) che definisce lo stato $|\lambda\rangle$.

(9) Supporre che, come nella domanda precedente, al tempo $t = 0$ il sistema si trovi nello stato $|\lambda\rangle$ Eq. (2) e venga eseguita una misura dell'operatore O. Determinare l'indeterminazione in impulso per tutti i tempi t (maggiori e minori di zero), supponendo che la misura dia un risultato diverso da zero.

(10) Determinare l'operatore unitario U_λ tale che

$$|\lambda\rangle = U_\lambda|0\rangle, \tag{5}$$

dove $|0\rangle$ è lo stato fondamentale dalla hamiltoniana Eq. (1)

(11) Determinare un operatore tale che il risultato della sua misura possa preparare il sistema nello stato $|\lambda\rangle$ Eq. (2), cioè tale che ci sia almeno un possibile risultato della sua misura tale che dopo la misura il sistema si trovi in $|\lambda\rangle$.