PROVA IN ITINERE DI FISICA QUANTISTICA

17 giugno 2024

Tempo massimo 3 ore. Non sono ammessi libri o appunti

Considerare un sistema la cui dinamica è descritta dall'hamiltoniana

$$H = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2} m\omega^2 x^2. \tag{1}$$

Supporre che al tempo $t = 0$ il sistema si trovi nello stato

$$|\psi\rangle = N\left[(1+i)|0\rangle + 2|1\rangle\right], \tag{2}$$

dove $|0\rangle$ e $|1\rangle$ sono rispettivamente lo stato fondamentale ed il primo stato eccitato dell'hamiltoniana Eq. (1).
Suggerimento: Ricordare che l'operatore di distruzione è dato da

$$a = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}\left(x + \frac{ip}{m\omega}\right). \tag{3}$$

(1) Determinare la costante di normalizzazione N.
(2) Calcolare il valore medio degli operatori posizione x ed impulso p nello stato $|\psi\rangle$ Eq. (2).
(3) Calcolare l'indeterminazione degli operatori posizione x ed impulso p nello stato $|\psi\rangle$ Eq. (2) e discutere se si tratti di uno stato di minima indeterminazione o meno.
(4) Al tempo $t = 0$ viene effettuata una misura di energia sul sistema dato. Determinare i possibili risultati della misura, le loro probabilità, e la funzione d'onda del sistema nella base delle posizioni immediatamente dopo la misura a seconda del risultato.
(5) Determinare a tutti i tempi t successivi alla misura i valori medi e le indeterminazioni di x e p, a seconda del risultato della misura.
(6) *Domanda di teoria:* Calcolare la dipendenza dal tempo degli elementi di matrice dell'operatore di distruzione Eq. (3) fra autostati qualunque della hamiltoniana Eq. (1) sia usando la rappresentazione di Schrödinger che quella di Heisenberg e dimostrare che i due risultati coincidono.
(7) Considerare l'operatore

$$O = (1+i)\lambda a + (1-i)\lambda a^\dagger. \tag{4}$$

Determinare l'equazione del moto alla Heisenberg per l'operatore O. La soluzione dell'equazione non è richiesta.
(8) Determinare valor medio e indeterminazione di posizione e impulso a qualunque tempo t per un sistema che al tempo $t = 0$ si trova nello stato Eq. (2) (e non viene fatta la misura di energia della domanda (4)).
(9) Determinare la matrice dell'operatore O Eq. (4) nel sottospazio ricoperto dagli stati di cui lo stato $|\psi\rangle$ Eq. (2) è sovrapposizione e discutere sotto che condizioni si tratti di una matrice autoaggiunta.
(10) Sfruttare il risultato della domanda precedente per determinare, nel caso in cui O sia un operatore hermitiano, i possibili risultati della misura di O per un sistema preparato nello stato $|\psi\rangle$ Eq. (2) e le loro probabilità.
(11) Sempre sfruttando il risultato della domanda (9), risolvere le equazioni del moto per l'operatore O Eq. (4), scrivendo l'operatore $O(t)$ alla Heisenberg ad ogni tempo t.