

PROVA IN ITINERE DI FISICA QUANTISTICA

22 giugno 2026

Tempo massimo 3 ore. Non sono ammessi libri o appunti

Considerare un sistema la cui dinamica è descritta dalla hamiltoniana

$$H = \begin{cases} \frac{p^2}{2m} & t < 0 \\ \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2 x^2 & 0 \leq t \leq t_0 \\ \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2 x^2 + eEx & t > t_0 \end{cases} \quad (1)$$

Supporre che al tempo $t = -t_0$ (con $t_0 > 0$) il sistema si trovi nello stato la cui funzione d'onda nella base degli impulsi è

$$\langle p|\psi\rangle = \psi(p) = N e^{-ix_0 \frac{p}{\hbar}} e^{-\frac{(p-p_0)^2}{4\Delta^2 p}}, \quad (2)$$

dove x_0 , p_0 e $\Delta^2 p$ sono costanti reali positive, e N è una costante di normalizzazione determinata dalla condizione $\langle \psi|\psi\rangle = 1$.

- (1) Al tempo $t = -t_0$ viene effettuata una misura di impulso sul sistema, che dà come risultato $\bar{p}$. Determinare la (densità di) probabilità che la misura dia questo risultato.
- (2) Determinare lo stato $|\bar{\psi}\rangle$ in cui si trova il sistema immediatamente dopo la misura, e scriverne la funzione d'onda $\bar{\psi}(x, -t_0 + \epsilon) = \langle x|\bar{\psi}(-t_0 + \epsilon)\rangle$ nella base delle posizioni. Discutere se sia normalizzabile in senso proprio o improprio e scrivere la condizione di normalizzazione.
- (3) Determinare la funzione d'onda del sistema su cui è stata eseguita la misura al punto precedente, ma ora al tempo $t = 0$, $\bar{\psi}(x, t) = \bar{\psi}(x, 0) = \langle x|\bar{\psi}(0)\rangle$.
- (4) Al tempo $t = +\epsilon$ viene eseguita una misura di energia sul sistema descritto dalla funzione d'onda trovata al punto precedente, che dà come risultato $E_0 = \frac{\hbar\omega}{2}$. Scrivere la funzione d'onda nello spazio delle posizioni $\psi_0(x, t) = \psi_0(x, +\epsilon) = \langle x|\bar{\psi}(+\epsilon)\rangle$ per il sistema dato, immediatamente dopo la misura.
- (5) Determinare la (densità di) probabilità che la misura di energia del punto precedente dia il risultato dato al punto precedente.
- (6) *Domanda di teoria:* Determinare come dipende dal tempo il valore medio di un operatore qualunque in un autostato della hamiltoniana per un sistema invariante per traslazioni temporali, dimostrando il risultato.
- (7) Ad un tempo $t > t_0$ viene effettuata una misura di energia sul sistema sul quale era stata precedentemente effettuata la misura al punto (4). Determinare i possibili risultati di questa misura.
- (8) Dimostrare che esiste un operatore T tale per cui, dato un autostato $|n\rangle$ della hamiltoniana H al tempo $0 \leq t \leq t_0$, allora $|n_E\rangle = T|n\rangle$ è un autostato della hamiltoniana H al tempo $t > t_0$; determinare la relazione fra i corrispondenti autovalori di energia; determinare la forma esplicita dell'operatore T nella base delle coordinate.
- (9) Determinare la relazione fra gli operatori a e a_E tali che

$$a|0\rangle = 0; \quad a_E|0_E\rangle = 0, \quad (3)$$

dove $|0\rangle$ e $|0_E\rangle$ sono rispettivamente lo stato fondamentale della hamiltoniana al tempo $0 \leq t \leq t_0$ e al tempo $t > t_0$. Utilizzare il risultato per dimostrare che lo stato $|0\rangle$ è autostato dell'operatore a_E e determinare il corrispondente autovalore.

- (10) Determinare la probabilità di ogni possibile risultato della misura al punto (7) se essa viene eseguita al tempo $t = t_0 + \epsilon$.
- (11) Determinare nuovamente la probabilità richiesta al punto precedente se la misura viene effettuata ad un qualunque tempo $t > t_0$.