

PROVA IN ITINERE DI FISICA QUANTISTICA

20 luglio 2020

Tempo massimo 2 ore. Libri o appunti possono essere consultati liberamente.

Considerare un sistema la cui dinamica è descritta dalla hamiltoniana

$$H_1 = \frac{p^2}{2m} + \lambda x, \quad (1)$$

oppure dalla hamiltoniana

$$\begin{aligned} H_2 &= \frac{p^2}{2m} + \lambda|x| \\ &= \frac{p^2}{2m} + \lambda[x\Theta(x) - x\Theta(-x)], \end{aligned} \quad (2)$$

dove x e p sono gli operatori posizione ed impulso, λ è una costante reale positiva, e $\Theta(x)$ è la funzione a gradino (theta di Heaviside).

- (1) Per la hamiltoniana H_1 , determinare le equazioni del moto di Heisenberg soddisfatte dagli operatori x , p , T (energia cinetica) e V (energia potenziale). Discutere la dipendenza dal tempo di p e di $T + V$ in termini delle proprietà di invarianza del sistema.
- (2) Sempre per la hamiltoniana H_1 , supporre che al tempo $t = 0$ il sistema si trovi in uno stato di minima indeterminazione (pacchetto gaussiano) con i valori medi di posizione ed impulso e l'indeterminazione in posizione rispettivamente dati da

$$\langle x \rangle = x_0; \quad \langle p \rangle = p_0; \quad \Delta^2 x = \sigma. \quad (3)$$

Determinare i valori medi di posizione ed impulso e le indeterminazioni sia in posizione che in impulso ad ogni tempo t .

- (3) Discutere sia per la hamiltoniana H_1 che per la hamiltoniana H_2 (a) se lo spettro di autostati di energia sia solo discreto, solo continuo, o se abbia una componente discreta ed una continua; (b) se lo spettro sia degenere o no e (c) se le autofunzioni di energia siano normalizzabili in senso proprio o in senso improprio.
- (4) Determinare le autofunzioni di energia per la hamiltoniana H_1 nella base degli impulsi, ossia $\psi_E^{(1)}(p) = \langle p | \psi_E \rangle$ e scrivere le autofunzioni nella base delle posizioni $\psi_E^{(1)}(x)$ in termini di esse. La normalizzazione non è richiesta. Utilizzare quindi il risultato per determinare le autofunzioni di energia per la hamiltoniana H_2 . La determinazione dello spettro di autovalori di energia non è richiesta.
- (5) Per la hamiltoniana H_1 , determinare la condizione di normalizzazione delle autofunzioni di energia trovate al punto precedente. Per la Hamiltoniana H_2 , scrivere le condizioni di raccordo che le autofunzioni $\psi_E^{(2)}(x)$ trovate al punto precedente devono soddisfare nell'origine.