PROVA IN ITINERE DI FISICA QUANTISTICA

19 luglio 2024

Tempo massimo 3 ore. Non sono ammessi libri o appunti

Considerare un sistema unidimensionale la cui dinamica è descritta dalla hamiltoniana

$$H = \frac{p^2}{2m} + V(x) \tag{1}$$

con potenziale dato da

$$V(x) = \begin{cases} 0 \text{ se } |x| \leq a \\ \infty \text{ se } |x| > a \end{cases}, \tag{2}$$

dove a è una costante reale positiva.

(1) Al tempo $t = 0$ il sistema si trova nello stato

$$|\psi\rangle = \sqrt{\frac{1}{3}} \left[|1\rangle + (1+i)|3\rangle \right], \tag{3}$$

dove $|1\rangle$ e $|3\rangle$ sono gli autostati della hamiltoniana Eq. (1) corrispondenti rispettivamente allo stato fondamentale ed al secondo stato eccitato. Scrivere la funzione d'onda per lo stato dato nella base delle posizioni $\psi(x) = \langle x|\psi\rangle$ e determinare i possibili risultati di una misura di energia in questo stato e le loro probabilità.

(2) Al tempo $t = 0$ viene effettuata una misura dell'osservabile associata all'operatore

$$O = |1\rangle\langle 3| + |3\rangle\langle 1|. \tag{4}$$

Quali sono i possibili risultati della misura?

(3) In che stato si trova il sistema dopo la misura dell'osservabile associata all'operatore O, a seconda dei risultati possibili?

(4) Qual è la probabilità dei risultati della misura dell'osservabile associata all'operatore O, se il sistema immediatamente prima della misura si trova nello stato $|\psi\rangle$ Eq. (3).

(5) Determinare i valori medi degli operatori posizione, impulso ed energia nello stato in cui il sistema si trova immediatamente dopo la misura dell'osservabile associata all'operatore O, a seconda del risultato della misura.

(6) *Domanda di teoria:* Dimostrare che le autofunzioni della hamiltoniana Eq. (1-2) sono autostati dello operatore parità $\mathcal{P}$, definito come l'operatore tale che $\langle x|\mathcal{P}|\psi\rangle = \psi(-x)$.

(7) Considerare ora la hamiltoniana

$$H' = \frac{p^2}{2m} + V'(x) \tag{5}$$

con

$$V'(x) = \begin{cases} \infty \text{ se } x < 0 \\ 0 \text{ se } 0 \leq x \leq 2a \\ \infty \text{ se } x > 2a \end{cases}, \tag{6}$$

Determinare autofunzioni ed autovalori della hamiltoniana H'.

(8) Determinare la relazione fra autofunzioni ed autovalori delle hamiltoniane H e H', dimostrare che esiste un operatore unitario $\mathcal{T}$ tale che se $|n\rangle$ è un autostato di H allora $\mathcal{T}|n\rangle$ è un autostato di H' e, scrivendo l'operatore $\mathcal{T}$ come $\mathcal{T} = e^{iG}$, determinare l'elemento di matrice dell'operatore G fra autostati della posizione.

(9) Determinare nuovamente le probabilità di una misura dell'operatore O della domanda (4) per un sistema che al tempo $t = 0$ si trova nello stato $|\psi\rangle$ Eq. (3), ma supponendo ora che la misura sia effettuata al tempo t.

(10) Determinare se l'operatore $\mathcal{T}$ della domanda (8) commuti con l'operatore parità $\mathcal{P}$ della domanda (6), e in particolare calcolare l'elemento di matrice del commutatore $\langle x|[\mathcal{T}, \mathcal{P}]|\psi\rangle$.

(11) Dimostrare che la hamiltoniana H' commuta con un opportuno operatore $\mathcal{P}'$ e determinare l'operatore $\mathcal{P}'$ in termini degli operatori $\mathcal{P}$ e $\mathcal{T}$ della domanda precedente.