PROVA IN ITINERE DI FISICA QUANTISTICA

19 settembre 2024

Tempo massimo 3 ore. Non sono ammessi libri o appunti

Considerare una particella libera unidimensionale di massa m, la cui funzione d'onda nella base delle posizioni è

$$\langle x|\psi\rangle = Ne^{ik_0 x}e^{-\lambda(x-x_0)^2}, \tag{1}$$

dove λ, x_0 e k_0 sono costanti reali positive, e la costante di normalizzazione N è scelta reale positiva ed è fissata dalla condizione $\langle\psi|\psi\rangle = 1$.
Considerare inoltre l'operatore

$$O = |k_1\rangle\langle k_2| + |k_2\rangle\langle k_1|, \tag{2}$$

dove $|k_i\rangle$, $i = 1,\ 2$ sono autostati dell'impulso, ossia

$$\hat{p}|k_i\rangle = \hbar k_i|k_i\rangle. \tag{3}$$

(1) Determinare la costante N ed i valori medi di una misura di posizione ed impulso nello stato dato, ossia $\langle\psi|\hat{x}|\psi\rangle$ e $\langle\psi|\hat{p}|\psi\rangle$.

(2) Determinare l'indeterminazione $\Delta^2 x$ per misure di posizione nello stato dato.

(3) Determinare l'elemento di matrice dell'operatore O nella base delle posizioni, ossia $\langle x|O|x'\rangle$.

(4) Determinare l'elemento di matrice dell'operatore O nella base degli impulsi, ossia $\langle k|O|k'\rangle$.

(5) Determinare il valor medio dell'operatore O nello stato $|\psi\rangle$, ossia $\langle\psi|O|\psi\rangle$.
Suggerimento: Ricordare che la funzione d'onda nello spazio degli impulsi per un pacchetto gaussiano centrato nell'origine sia nello spazio delle posizioni che nello spazio degli impulsi ed avente indeterminazione $\Delta^2 p$ è data da

$$\psi(k) = N' e^{-\frac{p^2}{4\Delta^2 p}},$$

dove $p = \hbar k$.

(6) *Domanda di teoria:* Dimostrare che l'indeterminazione di un operatore A in uno stato $|\phi\rangle$ si annulla se e solo se lo stato $|\phi\rangle$ è autostato di A. Dimostrare sia la condizione necessaria che la condizione sufficiente.

(7) Determinare la dipendenza dal tempo dell'operatore $O(t)$ in rappresentazione di Heisenberg.
Suggerimento: ricordare la relazione fra operatori alla Heisenberg e operatori alla Schrödinger e l'espressione dell'operatore di evoluzione temporale per la particella libera.

(8) Determinare la dipendenza dal tempo del valor medio dell'operatore O nello stato $|\psi\rangle$, ossia $\langle\psi|O|\psi\rangle(t)$ utilizzando la rappresentazione di Schrödinger. Dimostrare che il risultato coincide con quello che si trova utilizzando la rappresentazione di Heisenberg e sfruttando la risposta alla domanda precedente.

(9) Determinare la condizione sulle costanti k_1 e k_2 tale per cui l'operatore O commuta con la hamiltoniana.

(10) Determinare la condizione sulle costanti k_1 e k_2 tale per cui l'operatore O commuta con l'operatore parità P, definito da $\langle x|P|\psi\rangle = \psi(-x)$.

(11) Determinare se sia possibile soddisfare simultaneamente le condizioni trovate ai due punti precedenti. Se la risposta è affermativa, imporre la condizione trovata, e utilizzare il risultato per determinare in che stati si può trovare il sistema dopo una misura dell'operatore O.