

PROVA IN ITINERE DI FISICA QUANTISTICA

16 settembre 2026

Tempo massimo 3 ore. Non sono ammessi libri o appunti

Considerare un sistema la cui dinamica è descritta dalla hamiltoniana

$$H = \frac{p^2}{2m} - \kappa x, \quad (1)$$

dove x e p sono gli operatori posizione ed impulso, e κ è una costante reale positiva.

- (1) Determinare le equazioni del moto di Heisenberg soddisfatte dagli operatori x e p .
- (2) Determinare le equazioni del moto di Heisenberg soddisfatte dagli operatori T (energia cinetica) e V (energia potenziale).
- (3) Determinare la dipendenza dal tempo degli operatori T e V .
- (4) Determinare l'elemento di matrice della Hamiltoniana fra autostati dell'impulso, $\langle p|H|p'\rangle$, esprimendo gli operatori p e x nella base degli impulsi.
- (5) Determinare nuovamente $\langle p|H|p'\rangle$, ma ora utilizzando l'espressione degli operatori x e p e degli autostati $|p\rangle$ e $|p'\rangle$ nella base delle coordinate, ossia $\langle x|p\rangle$ e $\langle x|p'\rangle$.
- (6) *Domanda di teoria.* Ricavare l'espressione dell'operatore x nella base degli impulsi a partire dalla sua espressione e dell'espressione degli autostati dell'impulso nella base delle coordinate.
- (7) Determinare gli autostati della hamiltoniana Eq. (1).
Suggerimento: utilizzare il risultato della domanda (4).
- (8) Al tempo $t = 0$ viene effettuata una misura di energia sul sistema, che restituisce il risultato E_0 . Determinare la funzione d'onda del sistema immediatamente dopo la misura. Immediatamente dopo la misura di energia, viene effettuata una misura di impulso. Determinare i possibili risultati di questa seconda misura, la loro probabilità, e la funzione d'onda del sistema dopo la misura.
- (9) Al tempo $t = 0$ il sistema si trova in un certo stato in cui il valor medio e l'indeterminazione per misure di posizione sono rispettivamente dati da $\langle x \rangle = x_0$ e $\Delta^2 x = \sigma^2$. Determinare il valor medio e la minima indeterminazione di una misura di posizione effettuata ad un successivo tempo t_1 .
- (10) Rispondere nuovamente alla domanda precedente nel caso in cui il parametro κ nella Eq. (1) dipende dal tempo nel modo seguente:

$$\kappa(t) = \begin{cases} \kappa_0 & \text{se } t < t_0 \\ 0 & \text{se } t \geq t_0 \end{cases}. \quad (2)$$

Considerare sia il caso $t_0 < 0$, che il caso $0 < t_0 < t_1$.

- (11) Al tempo $t = 0$ sul sistema viene effettuata una misura dell'operatore

$$O = |\psi\rangle\langle\psi|, \quad (3)$$

con

$$\langle x|\psi\rangle = \psi(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}2\sigma} \exp - \left[\frac{x^2}{4\sigma^2} \right]. \quad (3)$$

La misura restituisce il risultato $\lambda_O = 1$. Dopo la misura il sistema evolve con dinamica data dalla hamiltoniana Eq. (1), con $\kappa = \kappa_0$ costante. Determinare l'indeterminazione di una misura di posizione effettuata ad un tempo $t > 0$ nel limite $\sigma \rightarrow 0$.