ESAME SCRITTO DI FISICA QUANTISTICA

31 gennaio 2025

Tempo massimo 3 ore. Non sono ammessi libri o appunti

Considerare un sistema di tre particelle di spin 1/2 in una dimensione la cui dinamica è descritta dalla hamiltoniana

$$H = \hbar\omega\left(a_1^\dagger a_1 + a_2^\dagger a_2 + a_3^\dagger a_3\right) + i\hbar\lambda\left(a_1^\dagger a_2 - a_2^\dagger a_1\right) + \frac{\mu}{\hbar}\vec{s}_1\cdot\vec{s}_2, \tag{1}$$

dove gli operatori $a_i^\dagger$, a_i soddisfano le relazioni di commutazione

$$[a_i, a_j^\dagger] = \delta_{ij}; \quad [a_i^\dagger, a_j^\dagger] = [a_i, a_j] = 0,$$

a_i, $a_i^\dagger$ sono operatori che agiscono sullo spazio degli stati fisici della i-esima particella, $\vec{s}_1$, $\vec{s}_2$ sono operatori di spin per la prima e la seconda particella rispettivamente, e ω, λ e μ sono costanti reali non negative.

(1) Nel caso $\lambda = \mu = 0$ determinare lo spettro e la degenerazione della hamiltoniana data, supponendo le particelle non identiche.
(2) Determinare nuovamente lo spettro della hamiltoniana data ma ora nel caso $\lambda = 0$ ma $\mu \neq 0$.
(3) Nel caso della domanda precedente, determinare la degenerazione dello spettro, supponendo μ e ω incommensurabili.
(4) Supporre ora che le prime due particelle siano identiche, ma non la terza. Determinare l'energia dello stato fondamentale e la sua degenerazione in questo caso, sempre quando $\lambda = 0$ ma $\mu \neq 0$. Il risultato cambia a seconda che μ sia più grande o più piccolo di ω?
(5) Rispondere nuovamente alla domanda precedente, ma ora con $\lambda = \mu = 0$
(6) *Domanda di teoria:* Determinare la trasformazione indotta sui momenti p_i da una trasformazione lineare di coordinate da x_i a coordinate $x_i' = M_{ij}x_j$ che preserva le relazioni di commutazione canoniche $[p_i, x_j] = -i\hbar\delta_{ij}$
(7) Dimostrare qual è la condizione sulla matrice U tale per cui gli operatori $b_i = U_{ij}a_j$ soddisfano le stesse relazioni di commutazione degli operatori a_i, ossia tale che $[b_i, b_j^\dagger] = \delta_{ij}$.
(8) Nel caso $\lambda \neq 0$, $\mu = 0$, sfruttando il risultato della domanda precedente, determinare la trasformazione che separa la hamiltoniana nella somma di tre hamiltoniane unidimensionali commutanti e determinarne lo spettro, supponendo di nuovo particelle non identiche.
(9) Sempre nel caso $\lambda \neq 0$, $\mu = 0$ e particelle non identiche, trattare ora il termine proporzionale a λ come una perturbazione e determinare al primo ordine l'effetto della perturbazione sull'energia e la degenerazione del primo stato eccitato della hamiltoniana imperturbata.
(10) Considerare ora la hamiltoniana

$$H' = H + \frac{B}{\hbar}\vec{s}\cdot\vec{L} \tag{2}$$

dove H è la hamiltoniana Eq. (1) nel caso $\lambda = 0$, $\mu \neq 0$, $\vec{s}$ è lo spin totale delle prime due particelle, $\vec{L} = \vec{x}\times\vec{p}$ con $x_i = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}\left(a_i + a_i^\dagger\right)$ e $p_i = -i\sqrt{\frac{m\omega\hbar}{2}}\left(a_i - a_i^\dagger\right)$, e B è una costante reale positiva. Determinare lo spettro della hamiltoniana H' Eq. (2).
(11) Determinare lo spettro della hamiltoniana H'' data da

$$H'' = H + \frac{\kappa}{\hbar}|\vec{L}|^2 \tag{3}$$

con H Eq. (1) e $\vec{L}$ come nella domanda precedente, ma ora nel caso in cui $\lambda \neq 0$, $\mu \neq 0$.