

ESAME SCRITTO DI FISICA QUANTISTICA

21 aprile 2023

Tempo massimo 3 ore. Non sono ammessi libri o appunti.

Considerare un sistema formato da due particelle di uguale massa m in tre dimensioni confinate all'interno di un parallelepipedo, ossia aventi dinamica descritta dalla hamiltoniana

$$H_0 = \frac{\vec{p}_1^2}{2m} + \frac{\vec{p}_2^2}{2m} + V(\vec{x}_1) + V(\vec{x}_2) \quad (1)$$

dove \vec{x}_i, \vec{p}_i sono rispettivamente gli operatori posizione e impulso per le due particelle e il potenziale $V(\vec{x}_i)$ ha la forma

$$V(x_i) = \begin{cases} 0 & \text{se } |x_i^{(j)}| \leq a_j \\ \infty & \text{se } |x_i^{(j)}| > a_j \end{cases}, \quad (2)$$

dove $x_i^{(j)}$ è la j -esima componente dell'operatore posizione per la i -esima particella e a_i sono costanti reali positive. Supporre inizialmente che le particelle siano non identiche e prive di spin.

- (1) Determinare lo spettro di autovalori di energia per il sistema dato.
- (2) Determinare le autofunzioni della hamiltoniana.
- (3) Determinare l'energia e la degenerazione dello stato fondamentale e del primo stato eccitato supponendo $a_1 = a_2 = a_3$.
- (4) Determinare nuovamente lo spettro di autovalori di energia e la degenerazione dello stato fondamentale e del primo stato eccitato del sistema supponendo che la hamiltoniana sia come nella domanda precedente (H_0 Eq. (1) con $a_1 = a_2 = a_3$), ma ora le sue particelle siano di spin $\frac{1}{2}$, sempre non identiche. Quanti stati distinti sono associati ad ogni autostato di energia?
- (5) Nella condizione della domanda precedente (particelle non identiche di spin $\frac{1}{2}$ in una buca cubica), supporre ora che la hamiltoniana sia data da

$$H = H_0 + \frac{\lambda}{\hbar^2} \vec{s}_1 \cdot \vec{s}_2 \quad (3)$$

dove \vec{s}_i sono gli operatori di spin per le due particelle e λ è una costante reale positiva. Determinare lo spettro della hamiltoniana H .

- (6) *Domanda di teoria:* Dimostrare che, data una hamiltoniana H e due operatori hermitiani A e B , se $[A, H] = [B, H] = 0$ ma $[A, B] \neq 0$, allora lo spettro di H è degenere.
- (7) Nella condizione della domanda 4 (particelle non identiche di spin $\frac{1}{2}$ in una buca cubica) supporre ora che la hamiltoniana sia data da

$$H' = H_0 + \frac{\mu}{\hbar} \vec{B} \cdot (\vec{s}_1 + \vec{s}_2) \quad (4)$$

dove μ è una costante reale positiva e \vec{B} è il vettore a componenti reali $\vec{B} = (B_x, 0, 0)$. Al tempo $t = 0$ viene misurato lo spin della prima particella lungo l'asse z con il risultato $s_1^z = \frac{1}{2}$. Determinare la probabilità che al tempo T una seconda misura di spin per la prima particella dia lo stesso risultato.

- (8) Supponendo ora che le due particelle siano identiche determinare nuovamente l'energia dello stato fondamentale e del primo stato eccitato per la hamiltoniana H Eq. (3) con $a_1 = a_2 = a_3$ sia nel caso in cui le particelle hanno spin 0 che nel caso in cui hanno spin $\frac{1}{2}$. Il risultato dipende dai valori di a_i e λ ?
- (9) Supporre ora che, nella situazione della domanda (4) (particelle non identiche di spin $\frac{1}{2}$ in una buca cubica con hamiltoniana data da H_0) sul sistema dato agisca una perturbazione della forma

$$V_p = \vec{B} \cdot (\vec{L}_1 + \vec{L}_2 + \vec{s}_1 + \vec{s}_2) \quad (5)$$

dove L_i sono gli operatori momento angolare orbitale per le due particelle, \vec{s}_i sono gli operatori di spin, e \vec{B} è come nella domanda 7. Determinare al primo ordine perturbativo la correzione all'energia dello stato fondamentale del sistema.

- (10) Determinare la degenerazione degli stati la cui energia è stata determinata alla domanda (8).
- (11) Considerare come nella domanda (9) particelle di spin $\frac{1}{2}$ in una buca cubica con hamiltoniana data da H_0 , però ora nel caso di particelle identiche. Viene effettuata una misura dello spin totale del sistema, immediatamente seguita da una misura di energia che rivela il sistema nello stato di minima energia. Determinare la probabilità che una misura di posizione immediatamente successiva riveli entrambe le particelle nell'origine a seconda dei risultati della misura di spin iniziale. Notare che vi sono tre misure immediatamente successive una all'altra.