ESAME SCRITTO DI FISICA QUANTISTICA

23 aprile 2025

Tempo massimo 3 ore. Non sono ammessi libri o appunti.

Considerare un sistema formato da due particelle di uguale massa m in tre dimensioni aventi dinamica descritta dalla hamiltoniana

$$H_0 = \frac{\vec{p}_1^2}{2m} + \frac{\vec{p}_2^2}{2m} + V(\vec{x}_1 - \vec{x}_2) \tag{1}$$

dove $\vec{x}_n$, $\vec{p}_n$, $n = 1, 2$ sono rispettivamente gli operatori posizione e impulso per le due particelle e il potenziale $V(\vec{x}_n)$ ha la forma

$$V(x_1^{(i)} - x_2^{(i)}) = \begin{cases} 0 \text{ se } |x_1^{(i)} - x_2^{(i)}| \leq L \\ \infty \text{ se } |x_1^{(i)} - x_2^{(i)}| > L \end{cases}, \tag{2}$$

dove $x_1^{(i)} - x_2^{(i)}$ è la i-esima componente dell'operatore $\vec{x}_1 - \vec{x}_2$ e L è una costante reale positiva.

(1) Separare la hamiltoniana nella somma di una hamiltoniana baricentrale ed una hamiltoniana relativa.

(2) Determinare lo spettro di energia del problema, e inoltre la degenerazione dello stato fondamentale e del primo stato eccitato della hamiltoniana relativa.

(3) Scrivere le autofunzioni $|n_1 n_2 n_3\rangle$ della hamiltoniana relativa nella base delle coordinate.

(4) Sul sistema dato viene effettuata una misura dell'operatore

$$O = |111\rangle\langle 112| + |112\rangle\langle 111|, \tag{3}$$

dove $|n_1 n_2 n_3\rangle$ sono autofunzioni della hamiltoniana relativa. Determinare tutti i possibili risultati della misura, e inoltre lo stato in cui si trova il sistema dopo la misura nei casi in cui il risultato della misura è diverso da zero.

(5) Determinare la probabilità dei possibili risultati della misura trovati nella domanda precedente, nell'ipotesi che prima della misura il sistema si trovi nello stato

$$|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}} \left(|111\rangle + |112\rangle + |121\rangle\right). \tag{4}$$

(6) *Domanda di teoria:* Dimostrare che se il potenziale per un sistema di n particelle è scrivibile come la somma di n potenziali che dipendono ciascuno solo dalla coordinata dell'n-esima particella, allora le autofunzioni e gli autovalori della hamiltoniana del sistema sono rispettivamente il prodotto e la somma di autofunzioni e autovalori delle hamiltoniane di singola particella.

(7) Supporre che le due particelle abbiano entrambe spin $\frac{1}{2}$, e che la hamiltoniana di spin sia data da

$$H_s = \lambda \vec{s}_1 \cdot \vec{s}_2, \tag{5}$$

dove $\vec{s}_i$ sono gli operatori di spin per le due particelle e λ è una costante reale con $|\lambda| \ll \frac{1}{mL^2}$. Determinare lo spettro di autovalori di energia e la degenerazione dello stato fondamentale e del primo stato eccitato per la somma della hamiltoniana relativa e della hamiltoniana di spin (cioè trascurando il moto del baricentro) sia quando $\lambda = 0$ che quando $\lambda \neq 0$ a seconda del segno di λ.

(8) Sul sistema delle domande (1-5) (cioè ignorando lo spin) agisce la perturbazione

$$V = \epsilon \left(x_1^{(3)} - x_2^{(3)}\right), \tag{6}$$

dove ϵ è una costante reale positiva. Determinare l'effetto della perturbazione sull'energia e sulla degenerazione del primo stato eccitato della hamiltoniana relativa.
Suggerimento: Ricordare l'integrale $\int_{-a}^{a} x \sin \frac{x\pi}{L} \cos \frac{x\pi}{2L}\, dx = \frac{32L^2}{9\pi^2}$.

(9) Supporre ora nuovamente che le due particelle abbiano spin $\frac{1}{2}$, ma che la hamiltoniana sia data dalla H_0 Eq. (1). Sul sistema viene eseguita una misura dello spin della prima particella lungo l'asse z. Determinare, dopo questa misura, l'effetto sull'energia e sulla degenerazione del primo stato eccitato della hamiltoniana relativa di una perturbazione della forma

$$V = \epsilon \vec{s}_1 \cdot (\vec{x}_1 - \vec{x}_2), \tag{6}$$

dove $\vec{s}_1$ è l'operatore di spin per la prima particella.

(10) Supporre ora che sul sistema dato venga effettuata una misura dell'operatore

$$O' = |1\rangle\langle 2| + |2\rangle\langle 1|, \tag{7}$$

dove si intende che l'operatore O' su uno stato $|n_1 n_2 n_3\rangle$ agisce come l'identità rispetto a n_1 ed n_2. Determinare i possibili risultati della misura di questo operatore, e la matrice densità relativa allo stato in cui il sistema si trova dopo la misura.

(11) Determinare la probabilità dei risultati della misura al punto precedente, supponendo che prima della misura il sistema si trovi nello stato $|\psi\rangle$ Eq. (4).