ESAME SCRITTO DI FISICA QUANTISTICA

17 giugno 2025

Tempo massimo 3 ore. Non sono ammessi libri o appunti.

Considerare un sistema di tre particelle aventi carica e, spin $\frac{1}{2}$ e ugual massa m, in tre dimensioni, soggette al potenziale coulombiano di un nucleo avente carica $3e$, la cui dinamica è descritta dalla hamiltoniana

$$H = H_1 + H_2 + H_3 \qquad (1),$$

dove

$$H_i = \frac{\vec{p}_i^2}{2m} - \frac{3e^2}{|\vec{x}_i|}, \qquad (2)$$

e $\vec{x}_i$ e $\vec{p}_i$ sono rispettivamente gli operatori (vettoriali) posizione e impulso della i-esima particella.

(1) Determinare lo spettro della hamiltoniana H_i Eq. (2), e la sua degenerazione sia includendo che non includendo il grado di libertà di spin.

(2) Determinare lo spettro della hamiltoniana H e scrivere la funzione d'onda del suo generico autostato in termini delle autofunzioni delle hamiltoniane H_i nel caso in cui le particelle non siano identiche.

(3) Determinare l'energia e la degenerazione dello stato fondamentale e del primo stato eccitato della hamiltoniana H, includendo il grado di libertà di spin, nel caso di particelle non identiche.
Suggerimento: ricordare che si tratta di particelle di spin $\frac{1}{2}$.

(4) Determinare l'energia dello stato fondamentale della hamiltoniana H Eq. (1) e la sua degenerazione nel caso di particelle identiche.

(5) Determinare i possibili risultati di una misura del momento angolare orbitale totale L^2_{tot}, dove

$$\vec{L}_{\text{tot}} = \vec{L}_1 + \vec{L}_2 + \vec{L}_3, \qquad (3)$$

quando il sistema di tre particelle identiche si trova nello stato fondamentale della hamiltoniana H.

(6) *Domanda di teoria:* Dimostrare, a partire dalle relazioni di commutazione per gli operatori di momento angolare L_i, che esistono degli operatori di innalzamento e abbassamento $L_\pm$ che, agendo su un autostato $|\ell m\rangle$ del momento angolare, producono un autostato $|\ell m \pm 1\rangle$. Non è richiesta una discussione della normalizzazione dello stato.

(7) Sulla prima particella vengono eseguite una misura di energia che la rivela nel primo stato eccitato della hamiltoniana H_1, immediatamente seguita da una misura di momento angolare lungo l'asse z che la rivela nello stato avente autovalore $+\hbar$ dell'operatore L^z_1. Determinare lo stato $|\phi\rangle$ in cui si trova la particella dopo queste misure, in termini degli autostati della hamiltoniana H_1 trovati al punto (1). Considerare l'operatore

$$P_z = i\hbar \left(|\ell 0\rangle\langle \ell 1| - |\ell 1\rangle\langle \ell 0|\right) \qquad (4),$$

dove $|\ell m\rangle$ sono autostati del momento angolare per la prima particella. Determinare per una particella che si trova nello stato $|\phi\rangle$, i possibili risultati della misura dell'operatore P_z, le loro probabilità, e lo stato in cui si trova il sistema dopo la misura di P_z.

(8) Al tempo $t = 0$ la prima particella si trova nello stato $|\phi\rangle$ determinato alla domanda precedente ed è soggetta alla hamiltoniana

$$H' = H_1 + H_z \qquad (5)$$

con H_1 dato dalla Eq. (2) e

$$H_z = BP_z \qquad (6)$$

dove P_z è dato dalla Eq. (4) e B è una costante reale positiva. Determinare la probabilità che al tempo t il sistema si trovi sempre nello stesso stato $|\phi\rangle$.

(9) La prima particella si trova nel primo stato eccitato della hamiltoniana H_1 Eq. (2). Trattare la hamiltoniana H_z data dalla Eq. (4) come una perturbazione, e determinarne al primo ordine l'effetto sull'energia e la degenerazione dello stato. Discutere inoltre se lo spettro della hamiltoniana H' Eq. (4) possa essere determinato esattamente.

(10) Sul sistema della domanda 4 (stato fondamentale della hamiltoniana H per particelle identiche) viene eseguita una misura della terza componente del momento angolare totale Eq. (3), L^z_{tot}, che dà come risultato $m^{\text{tot}} = +1$, seguita da una misura della terza componente dello spin totale. Scrivere la funzione d'onda in cui si trova il sistema dopo questa misura, a seconda dei risultati.

(11) Determinare il valor medio della terza componente dello spin di una singola particella s^i_z nello stato trovato alla domanda precedente.