

ESAME SCRITTO DI FISICA QUANTISTICA

9 luglio 2025

Tempo massimo 3 ore. Non sono ammessi libri o appunti

Considerare una particella la cui dinamica è descritta dalla hamiltoniana

$$H_0 = \mu \vec{L}^2, \quad (1)$$

dove $\vec{L} = \vec{x} \times \vec{p}$ sono operatori di momento angolare e μ è una costante reale positiva.

- (1) Determinare lo spettro di autovalori dell'hamiltoniana Eq. (1).
- (2) Determinare la degenerazione dello spettro trovato al punto precedente.
- (3) Determinare la funzione d'onda di stato fondamentale nella base delle coordinate per la hamiltoniana Eq. (1).
- (4) Supporre ora che la particella abbia spin $\frac{1}{2}$, e la sua hamiltoniana sia data da

$$H = H_0 + B \vec{s} \cdot \vec{L}, \quad (2)$$

dove B è una costante reale positiva (incommensurabile con μ), e $\vec{s}$ è l'operatore di spin. Determinare lo spettro e la degenerazione della hamiltoniana H .

- (5) Scrivere le equazioni di Heisenberg per gli operatori $\vec{x}$ e $\vec{p}$ per il sistema della domanda (4) nel caso in cui $\mu = 0$.
- (6) *Domanda di teoria:* Dimostrare che per un sistema avente spin s e momento angolare orbitale ℓ i valori permessi del momento angolare totale sono $|\ell - s| \leq j \leq \ell + s$.
- (7) Sul sistema della domanda (1) viene effettuata una misura di momento angolare che lo rivela nello stato con $\ell = 1$ e $m = -1$. Immediatamente dopo viene effettuata una misura dell'operatore

$$L_w = i(|1 - 1\rangle\langle 10| - |10\rangle\langle 1 - 1|) \quad (3)$$

dove $|\ell m\rangle$ sono autostati di H_0 . Determinare i possibili risultati di questa misura, le loro probabilità, e lo stato in cui si trova il sistema dopo la misura.

- (8) Sul sistema della domanda (1) agisce una perturbazione

$$H_p = \epsilon L_x, \quad (4)$$

dove L_x è l'operatore di momento angolare lungo l'asse x ed ϵ è una costante reale positiva. Determinare al primo ordine in ϵ l'effetto della perturbazione sull'energia e la degenerazione del primo stato eccitato della hamiltoniana H_0 .

- (9) Supporre ora che la particella sia senza spin, e la sua hamiltoniana sia data da

$$H = H_0 + \vec{B} \cdot \vec{L}, \quad (5)$$

dove $\vec{B}$ è un vettore a componenti reali diretto lungo l'asse z . Sul sistema al tempo $t = 0$ viene eseguita una misura dell'operatore L_w Eq. (3) che lo rivela nello stato avente autovalore massimo. Determinare la probabilità che al tempo t una successiva misura dell'operatore L_w riveli il sistema nello stesso stato.

- (10) Sul sistema della domanda (1) agisce una perturbazione dipendente dal tempo della forma

$$H' = \lambda L_x e^{-t/\tau}, \quad (6)$$

dove λ e τ sono costanti reali positive. Al tempo $t = 0$ viene effettuata una misura di momento angolare che lo rivela nello stato con $\ell = 1$ e $m = -1$. Determinare al primo ordine in λ la probabilità che al tempo t il sistema subisca una transizione in qualunque altro stato $|\ell m\rangle$. Il calcolo dell'integrale non è richiesto.

- (11) Determinare se qualcuno degli stati $|\ell m\rangle$ sia di minima indeterminazione per la coppia di operatori L_x e L_y , ossia sia tale che il prodotto delle indeterminazioni $\Delta L_x \Delta L_y$ sia diverso da zero e prenda il minimo valore compatibile con il principio di indeterminazione.