ESAME SCRITTO DI FISICA QUANTISTICA

19 settembre 2025

Tempo massimo 3 ore. Non sono ammessi libri o appunti

Considerare un sistema di due particelle tridimensionali di ugual massa m la cui dinamica è descritta dalla hamiltoniana

$$H = H_1 + H_2, \tag{1}$$

dove

$$H_1 = \frac{{p_1^x}^2 + {p_1^y}^2}{2m} + \frac{{p_2^x}^2 + {p_2^y}^2}{2m} + m\omega^2 \left[(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2\right] \tag{2}$$

e

$$H_2 = \frac{{p_1^z}^2}{2m} + \frac{{p_2^z}^2}{2m} + m\omega'^2 \left[(z_1 - z_2)^2\right] + Ez_1 + Ez_2, \tag{3}$$

avendo indicato con p_i^x, p_i^y p_i^z e x_i y_i z_i le tre componenti spaziali degli operatori impulso e posizione delle due particelle, e con ω, ω' ed E costanti reali positive tutte incommensurabili.

(1) Attraverso un opportuno cambio di variabili, separare entrambe le hamiltoniane H_1 e H_2 Eq. (2-3) in una parte baricentrale ed una parte relativa:

$$H_i = H_i^r + H_i^b, \tag{4}$$

con $i = 1, 2$.

(2) Determinare la dipendenza temporale delle tre componenti degli operatori posizione ed impulso del baricentro in rappresentazione di Heisenberg.

(3) Determinare lo spettro e la degenerazione della hamiltoniana relativa totale

$$H^r = H_1^r + H_2^r. \tag{5}$$

(4) Scrivere la funzione d'onda di stato fondamentale per la hamiltoniana H^r Eq. (5).

(5) Scrivere il più generale ket di stato $|\psi_1\rangle$ per un sistema che si trova nel primo stato eccitato della hamiltoniana H_1^r (ossia la parte relativa della hamiltoniana H_1 Eq. (2)), e determinare da quanti parametri osservabili indipendenti dipende.

(6) *Domanda di teoria:* Dimostrare che nel sottospazio degli stati aventi momento angolare orbitale $\ell = 0$ la hamiltoniana per un oscillatore armonico tridimensionale isotropo si riduce a quella di un oscillatore armonico unidimensionale..

(7) Considerare l'operatore

$$O = \lambda \left(a_x^\dagger a_y + a_y^\dagger a_x\right), \tag{6}$$

dove

$$a_x = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}} \left(x^r + i\frac{p_x^r}{m\omega}\right), \tag{7}$$

x^r e p_x^r sono rispettivamente le componenti lungo l'asse x degli operatori posizione e impulso relativo, e a_y è analogamente definito rimpiazzando x con y dappertutto nelle Eq. (6-7).

Determinare i possibili risultati della misura di questo operatore per un sistema che si trova nello stato $|\psi_1\rangle$ determinato al punto (5), le loro probabilità in termini dei parametri da cui lo stato dipende, e lo stato in cui si trova il sistema dopo la misura a seconda del risultato.

(8) Determinare l'effetto sull'energia e la degenerazione del primo stato eccitato della hamiltoniana H_1^r (la stessa dei punti 5 e 7) di una perturbazione proporzionale all'operatore O Eq. (6).

(9) Determinare le relazioni di commutazione fra gli operatori

$$j_a = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{2} a_i^\dagger \sigma_{ij}^a a_j, \tag{8}$$

dove $a_1 = a_x$ e $a_2 = a_y$, e σ_{ij}^a è la a-esima matrice di Pauli di componenti ij, e utilizzare il risultato per determinare lo spettro dell'operatore $J^2 = j_1^2 + j_2^2 + j_3^2$.

(10) Dimostrare che gli operatori $A_\pm$, $A_\pm^\dagger$ definiti come

$$A^\pm = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(a_x \pm a_y\right) \tag{8}$$

soddisfano le stesse relazioni di commutazione degli operatori a_x, a_y, $a_x^\dagger$, $a_y^\dagger$.

(11) Utilizzare il risultato della domanda precedente per determinare esattamente lo spettro della hamiltoniana perturbata $H = H_1^r + \epsilon O$.