ESAME SCRITTO DI MECCANICA QUANTISTICA I

23 gennaio 2007

Tempo massimo 3 ore. Non sono ammessi libri o appunti

Si consideri un sistema di due particelle tridimensionali descritto dall'hamiltoniana

$$H = \frac{\vec{p}_1^2}{2m} + \frac{\vec{p}_2^2}{2m} - \frac{e^2}{|\vec{x}_1 - \vec{x}_2|}, \tag{1}$$

dove $\vec{p}_i$ ed $\vec{x}_i$ sono rispettivamente gli operatori impulso e posizione per le due particelle.

(1) Attraverso un opportuno cambio di variabili, riscrivere l'hamiltoniana eq. (1) nella forma

$$H = H_0 + H_r \qquad (2),$$

dove H_0 ha la forma di una hamiltoniana di particella libera.

(2) Esprimere lo spettro di autovalori dell'hamiltoniana H_r che compare nella eq. (2), nella forma $E_n = kf(n)$, dove k è una costante dimensionale, ed $f(n)$ è una funzione adimensionale dell'indice ugualmente adimensonale n. Determinare esplicitamente la costante dimensionale k in termini dei parametri che compaiono nell'hamiltoniana eq. (1). Che forma ha la funzione $f(n)$? (Confrontare con l'atomo di idrogeno, di cui si suppone noto lo spettro).

(3) Si supponga che le due particelle descritte dall'hamiltoniana (1) abbiano spin $\frac{1}{2}$, accoppiati attraverso l'hamiltoniana

$$H_s = -\frac{a}{\hbar^2}\vec{\sigma}_1 \cdot \vec{\sigma}_2 \qquad (3),$$

dove a è una costante reale positiva e σ_i sono gli operatori di spin delle due particelle. Determinare lo spettro di

$$H_{tot} = H_r + H_s, \tag{4}$$

dove H_r è l'hamiltoniana che compare nella eq. (2).

(4) Si consideri ora la perturbazione

$$H_p = \frac{\epsilon}{\hbar^2}|\vec{x}_1 - \vec{x}_2|\vec{L} \cdot \vec{S}, \tag{5}$$

dove $\vec{S}$ è l'operatore spin totale e $\vec{L}$ è l'operatore di componenti

$$L^i = \epsilon^{ijk}\left(x_1^j - x_2^j\right)\frac{1}{2}\left(p_1^k - p_2^k\right). \tag{6}$$

Determinare la correzione al primo ordine perturbativo agli autostati dell'hamiltoniana H_{tot} eq. (4) aventi $n = 1$ ed $n = 2$ e qualunque valore degli altri numeri quantici. Che

cosa succede se la perturbazione è applicata alla hamiltoniana H_r di eq. (2)?
Suggerimento: Nell'autostato $|nl\rangle$ dell'atomo di idrogeno si ha
$\langle nl|r|nl\rangle = \frac{1}{2}a_0\left[3n^2 - l(l+1)\right]$, dove r è la coordinata radiale e a_0 il raggio di Bohr.

(5) Si supponga ora che le due particelle che interagiscono attraverso l'hamiltoniana eq. (1) siano identiche. Determinare in tal caso lo spettro dell'hamiltoniana H_{tot} eq. (4) e calcolare la sua degenerazione.
Suggerimento: La parità degli autostati del momento angolare è data da $\langle -\vec{x}|lm\rangle = (-1)^l\langle \vec{x}|lm\rangle$.