ESAME SCRITTO DI MECCANICA QUANTISTICA I

29 gennaio 2009

Tempo massimo 3 ore. Non sono ammessi libri o appunti

Considerare un sistema formato da due particelle in tre dimensioni, la cui dinamica è descritta dall'hamiltoniana

$$H = \frac{\vec{p}_2^2}{2m} + \frac{\vec{p}_1^2}{2m} + V(\vec{x}_1, \vec{x}_2) \tag{1}$$

$$V(\vec{x}_1, \vec{x}_2) = \frac{1}{2} m\omega^2 \left(\vec{x}_1^2 + \vec{x}_2^2 - 2\vec{x}_1 \cdot \vec{x}_2 \right). \tag{2}$$

(1) Attraverso un opportuno cambio di variabili, riscrivere l'hamiltoniana eq. (1) come

$$H = H_0 + H_r, \tag{3}$$

dove H_0 ha la forma di una hamiltoniana di particella libera.

(2) Determinare le equazioni del moto in rappresentazione di Heisenberg per gli operatori posizione ed impulso del centro di massa del sistema dato.

(3) Determinare lo spettro di autovalori dell'hamiltoniana H_r e la loro degenerazione.

(4) Si supponga ora che il sistema sia soggetto alla perurbazione

$$V(x) = \varepsilon (x_1^{(3)} - x_2^{(3)})^3, \tag{4}$$

dove $x_i^{(3)}$ denota la componente lungo l'asse z del vettore $\vec{x}_i$. Si determini la correzione al primo ordine agli autovalori ed agli autostati di H dovuta a questa pertrubazione.

(5) Si consideri l'operatore $\mathcal{P}$ (parità) tale che

$$\langle \vec{x}_1, \vec{x}_2 | \mathcal{P} | \psi \rangle = \langle -\vec{x}_1, -\vec{x}_2 | \psi \rangle. \tag{5}$$

Si definisca inoltre l'operatore $\mathcal{P}_1$ che agisce sulle prime componenti dei vettori $\vec{x}_i$ come segue: dati i vettori $x_i = \begin{pmatrix} x_i^{(1)} \\ x_i^{(2)} \\ x_i^{(3)} \end{pmatrix}$, sia $\vec{x}_i^r \equiv \begin{pmatrix} -x_i^{(1)} \\ x_i^{(2)} \\ x_i^{(3)} \end{pmatrix}$; l'operatore $\mathcal{P}_1$ è tale che

$$\langle \vec{x}_1, \vec{x}_2 | \mathcal{P}_1 | \psi \rangle = \langle \vec{x}_1^r, \vec{x}_2^r | \psi \rangle. \tag{6}$$

Si discuta se possano essere diagonalizzati simultaneamente: (a) l'hamiltoniana H_r e l'operatore $\mathcal{P}$; (b) l'hamiltoniana H_r e l'operatore $\mathcal{P}_1$; (c) i tre operatori H_r, $\mathcal{P}$ e $\mathcal{P}_1$. In tutti i tre casi, si discuta inoltre se è possibile diagonalizzare, simultaneamente agli operatori dati, anche il momento angolare totale L^2. In ogni caso in cui è possibile diagonalizzare gli operatori simultaneamente si dia la forma degli autostati simultanei in termini degli autostati di H_r. Si discuta come cambiano i risultati in presenza della perturbazione eq. (4).

(6) Si supponga ora che le due particelle siano identiche e di spin $\frac{1}{2}$, e che si trovino in uno stato di spin totale $s^{\text{tot}} = 0$. Si determinino lo spettro di H_r e la sua degenerazione in tal caso.