ESAME SCRITTO DI MECCANICA QUANTISTICA I

27 gennaio 2010

Tempo massimo 3 ore. Non sono ammessi libri o appunti

Si consideri una particella in tre dimensioni la cui dinamica è descritta dalla hamiltoniana

$$H = \frac{\vec{\pi}^2}{2m} - \frac{e^2}{|\vec{x}|} \qquad (1),$$

dove $\vec{x}$ è l'operatore (vettoriale) posizione e $\vec{\pi}$ è l'operatore definito da

$$\vec{\pi} = \vec{p} - \vec{A}(\vec{x}), \qquad (2)$$

essendo a loro volta $\vec{p}$ l'operatore impulso, e $\vec{A}(\vec{x})$ un vettore di funzioni degli operatori posizione.

(1) Determinare la dipendenza temporale degli operatori $\vec{x}$, $\vec{p}$ e $\vec{\pi}$ in rappresentazione di Heisenberg.

(2) Si supponga di conoscere un'autofunzione $\langle \vec{x}|i\rangle = \psi_i(\vec{x})$ dell'hamiltoniana Eq. (1), associata ad un certo autovalore di energia E_i. Dimostrare che la funzione

$$\psi_i'(\vec{x}) = e^{-\frac{i}{\hbar}\Lambda(\vec{x})}\psi_i(\vec{x}) \qquad (3)$$

è un'autofunzione di una hamiltoniana della forma Eq. (1), ma con un diverso $\vec{A}'(\vec{x})$, e determinare $\vec{A}'(\vec{x})$ in termini di $\vec{A}(\vec{x})$ e di $\Lambda(\vec{x})$

(3) Supporre ora che $\vec{A}(\vec{x})$ sia dato da $\vec{A}(\vec{x}) = \vec{A}_0(\vec{x})$, con

$$\vec{A}_0(\vec{x}) = \frac{B}{2}\begin{pmatrix} x_2 \\ x_1 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad (4)$$

dove B è una costante reale positiva, e x_i è la componente dell'operatore $\vec{x}$ lungo l'i–esimo asse cartesiano. Determinare lo spettro dell'hamiltoniana.
Suggerimento: sfruttare il risultato della domanda precedente e porre $\Lambda(x) = kx_1x_2$, con k è una costante opprtuna.

(4) Suppporre ora che $\vec{A}(\vec{x})$ sia dato da $\vec{A}(\vec{x}) = \vec{A}_0(\vec{x}) + \vec{A}_1(\vec{x})$, dove $\vec{A}_0(\vec{x})$ è dato nella Eq. (4) e

$$\vec{A}_1(\vec{x}) = \frac{B}{2}\begin{pmatrix} x_2 \\ -x_1 \\ 0 \end{pmatrix}. \qquad (4)$$

Supporre che B is piccolo, e determinare lo spettro dell'hamiltoniana al primo ordine perturbativo.

(5) Discutere la degenerazione dello spettro determinato al punto precedente in termini delle proprietà di trasformazione dell'hamiltoniana sotto rotazioni.