ESAME SCRITTO DI MECCANICA QUANTISTICA I

12 gennaio 2012

Tempo massimo 3 ore. Non sono ammessi libri o appunti

Si consideri un sistema di N particelle la cui dinamica è descritta dalla hamiltoniana

$$H = \sum_{i=1}^{N} \frac{\vec{p}_i^2}{2m_i} + \sum_{i=1}^{N} V_i\left(\vec{x}_i\right) + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N} V_{ij}\left(\vec{x}_i, \vec{x}_j\right). \tag{1}$$

(1) Si scrivano le equazioni del moto alla Heisenberg per gli operatori posizione, impulso e momento angolare della i-esima particella $\vec{x}_i$, $\vec{p}_i$, $\vec{L}_i$.

(2) Si definisca la corrente di probabilità per la i–esima particella

$$\vec{J}_i(\vec{x}_1, \vec{x}_2, \ldots, \vec{x}_n) \equiv \frac{-i\hbar}{2m_i}\left(\psi^* \vec{\nabla}_i \psi - \psi \vec{\nabla}_i \psi^*\right), \tag{2}$$

dove $\psi = \psi(\vec{x}_1, \vec{x}_2, \ldots, \vec{x}_n)$ è la funzione d'onda per il sistema di N particelle, e $\vec{\nabla}_i$ denota il gradiente rispetto alla i-esima coordinata. Si dimostri che essa soddisfa l'equazione di continuità

$$\frac{d}{dt}\rho + \sum_{i=1}^{N} \vec{\nabla}_i \cdot \vec{J}_i = 0, \tag{3}$$

dove $\rho \equiv |\psi|^2$.

(3) Usando il risultato della prima domanda, si determinino le equazioni del moto per gli operatori impulso totale $\vec{P} \equiv \sum_{i=1}^{N} \vec{p}_i$ e momento angolare totale $\vec{L} \equiv \sum_{i=1}^{N} \vec{L}_i$, nel caso in cui $V_i = 0$ per ogni i, e $V_{ij}\left(\vec{x}_i, \vec{x}_j\right) = V_{ij}\left(|\vec{x}_i - \vec{x}_j|\right)$, ossia le forze siano solo forze centrali a due corpi. Si giustifichi il risultato ottenuto.

(4) Si dimostri che se le N particelle sono identiche, allora la quanità

$$\rho(\vec{x}, t) \equiv \langle \psi | \delta^{(3)}(\vec{x} - \vec{x}_i) | \psi \rangle \tag{4}$$

non dipende da i. Si discutano sia il caso di bosoni che di fermioni. Che cosa rappresenta fisicamente $\rho(\vec{x}, t)$?

(5) Si supponga ora che $N = 2$, $m_1 = m_2$, ed inoltre

$$V_1(\vec{x}_1) = \frac{1}{2} m\omega^2 \vec{x}_1^2 \tag{5}$$

$$V_2(\vec{x}_2) = \frac{1}{2} m\omega^2 \vec{x}_2^2 \tag{6}$$

$$V_{12}(\vec{x}_1, \vec{x}_2) = -m\omega^2 \vec{x}_1 \cdot \vec{x}_2, \tag{7}$$

dove ω è una costante reale positiva. Si determinino lo spettro e la degenerazione dell'hamiltoniana.

(6) Nel caso della domanda precedente, si tratti il termine $V_{12}(\vec{x}_1, \vec{x}_2)$ come una perturbazione. Si determinino al primo ordine lo spettro e la sua degenerazione.