ESAME SCRITTO DI MECCANICA QUANTISTICA I

1 febbraio 2013

Tempo massimo 3 ore. Non sono ammessi libri o appunti

Si consideri una coppia di particelle in tre dimensioni, di spin $\frac{1}{2}$, interagenti attraverso un potenziale coulombiano ed una interazione spin-spin ed immerse in un campo elettrico esterno, la cui dinamica cioè è descritta dall'hamiltoniana

$$H_0 = \frac{\vec{p}_1^2}{2m_1} + \frac{\vec{p}_2^2}{2m_2} - \frac{e^2}{|\vec{x}_1 - \vec{x}_2|} - g_1 \vec{E} \cdot \vec{x}_1 - g_2 \vec{E} \cdot \vec{x}_2 + \lambda \vec{s}_1 \cdot \vec{s}_2, \tag{1}$$

dove $\vec{x}_i$, $\vec{p}_i$ e $\vec{s}_i$ sono rispettivamente gli operatori posizione, impulso e spin delle due particelle, m_i sono le loro masse, $\vec{E}$ (campo elettrico) è un vettore (costante) di numeri reali, λ è una costante reale positiva e le cariche g_i sono date da

$$g_1 = \frac{m_1}{m_1 + m_2} e; \qquad g_2 = \frac{m_2}{m_1 + m_2} e$$

in unità della carica dell'elettrone e.

(1) Separare l'hamiltoniana nella somma di tre hamiltoniane, baricentrale, relativa e di spin e dimostrare che commutano.

(2) Determinare le equazioni per il moto del baricentro in rappresentazione di Heisenberg e risolverle (il moto relativo non è richiesto).

Trascurare d'ora in poi il moto del baricentro.

(3) Determinare la dipendenza dal tempo in rappresentazione di Schrödinger per la funzione d'onda del sistema (relativa e di spin), supponendo che esso si trovi nello stato fondamentale e scriverne la funzione d'onda esplicitamente (la normalizzazione non è richiesta).

(4) Supporre ora che l'hamiltoniana sia data da

$$H = H_0 + \Delta H, \tag{2}$$

dove ΔH descrive un accoppiamento di dipolo con un campo magnetico, ossia

$$\Delta H = \vec{B} \cdot (\mu_l \vec{L} + \mu_1 \vec{s}_1 + \mu_2 \vec{s}_2), \tag{3}$$

dove $\vec{L}$ è l'operatore momento angolare relativo, $\vec{B}$ (campo magnetico) è un vettore (costante) di numeri reali, e μ_i sono costanti reali positive. Determinare al primo ordine la perturbazione dovuta a ΔH all'energia dello stato fondamentale (sempre del sistema relativo+spin).
Suggerimento: scegliere opportunamente l'asse z.

(5) Determinare, sempre al primo ordine, la perturbazione dovuta a ΔH all'energia dello stato (sempre del sistema relativo+spin) in cui l'hamiltoniana relativa è sempre nello stato fondamentale mentre quella di spin ora è nel primo stato eccitato, e discutere l'effetto della perturbazione sulla degenerazione dello stato.

(6) Determinare (in assenza di perturbazione, cioè con $H = H_0$) la probabilità che se il sistema al tempo $t = 0$ si trova nello stato in cui lo spin della prima particella è su e quello della seconda particella è giù (rispetto ad un qualunque asse), una misura di spin della prima particella al tempo t dia come risultato che essa si trova nello stato di spin giù (rispetto allo stesso asse). Eseguire il calcolo supponendo che il sistema si trovi in un autostato dell'hamiltoniana spaziale (relativa). Se il sistema non è in un autostato dell'hamiltoniana spaziale il risultato cambia, e se sì, come?

(7) Determinare per quali valori del tempo t l'effetto della perturbazione Eq. (3) sullo stato dato al punto precedente può essere determinato in modo esatto.