ESAME SCRITTO DI MECCANICA QUANTISTICA I

24 gennaio 2014

Tempo massimo 3 ore. Non sono ammessi libri o appunti

Si consideri una sistema di due particelle unidimensionali, la cui dinamica è descritta dalla hamiltoniana

$$H = \hbar\omega\left(a_1^\dagger a_1 + a_2^\dagger a_2\right) + \hbar\lambda\left(a_1^\dagger a_2 + a_2^\dagger a_1\right) \tag{1}$$

dove a_i è un operatore che agisce sullo spazio degli stati fisici della i-esima particella, e gli a_i soddisfano le relazioni di commutazione

$$[a_i, a_j] = [a_i^\dagger, a_j^\dagger] = 0 \tag{2}$$

per ogni i, j, mentre

$$[a_i, a_j^\dagger] = \delta_{ij}. \tag{3}$$

(1) Determinare le equazioni del moto per gli operatori a_i, $a_j^\dagger$ in rappresentazione di Heisenberg.

(2) Definire il vettore di operatori

$$a \equiv \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \tag{4}$$

e quindi il vettore di operatori

$$A = \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \end{pmatrix}, \tag{5}$$

legati agli a dall'equazione

$$A = M(\theta)a \tag{6}$$

dove $M(\theta)$ è la matrice due per due

$$M(\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}, \tag{7}$$

dove θ è un parametro reale.

Determinare le relazioni di commutazione degli operatori A_i, $A_j^\dagger$ e scrivere la hamiltoniana H in termini di essi.

(3) Considerando il termine proporzionale a λ come perturbazione, determinare lo spettro della hamiltoniana H Eq. (1) imperturbata (cioè quando $\lambda = 0$), e la correzione perturbativa al primo ordine all'energia del suo primo stato eccitato.

(4) Determinare quindi la correzione fino al secondo ordine all'energia del *secondo* stato eccitato.

(5) Dimostrare che esiste una scelta di θ nella Eq. (7) che rende separabile l'hamiltoniana, ed utilizzare il risultato per determinare lo spettro dell'hamiltoniana Eq. (1) esattamente. Confrontare lo spettro esatto con il risultato perturbativo al punto precedente. Discutere che cosa succede quando $\lambda = \omega$.

(6) Determinare la soluzione delle equazioni del moto per gli operatori a_i, $a_j^\dagger$ trovate al punto (1). Anche in questo caso, discutere che cosa succede quando $\lambda = \omega$.

(7) Determinare l'operatore hermitiano J tale per cui, definito $R(\theta) = \exp i\theta J$, si ha

$$A_i = R(\theta) a_i R^{-1}(\theta). \tag{8}$$

Suggerimento: esprimere J in termini degli operatori a_i, $a_j^\dagger$, eventualmente sfruttando le espressioni degli operatori di momento angolare in termini di essi, ben note nel caso dell' oscillatore armonico tridimensionale.