ESAME SCRITTO DI MECCANICA QUANTISTICA I

30 gennaio 2017

Tempo massimo 3 ore. Non sono ammessi libri o appunti

Considerare un sistema formato da due particelle di spin s ed uguale massa m (ma non necessariamente identiche) in una dimensione, la cui dinamica è descritta dall'hamiltoniana

$$H_0 = \frac{p_1^2}{2m} + \frac{p_2^2}{2m} + m\left[\left(\frac{\omega^2+\Omega^2}{4}\right)\left(x_1^2+x_2^2\right) + \left(\frac{\Omega^2-\omega^2}{2}\right)x_1x_2\right] - B\vec{s}_1\cdot\vec{s}_2, \qquad (1)$$

dove x_i, p_i e $\vec{s}_i$ sono rispettivamente gli operatori posizione, impulso e spin per le due particelle, e ω, Ω e B sono costanti reali positive.

(1) Esprimere l'hamiltoniana Eq. (1) in termini di coordinate relativa e del baricentro, e dei corrispondenti impulsi, e determinarne lo spettro per valori generici dello spin delle due particelle.

(2) Determinare lo spettro e la sua degenerazione quando $\Omega = \omega$ e le particelle hanno spin $\frac{1}{2}$ e non sono identiche. Discutere l'ordinamento dei livelli energetici supponendo che $\hbar^2 B \ll \hbar\omega$.

(3) *Domanda di teoria:* Dimostrare che il massimo valore dello spin totale per un sistema di due particelle aventi spin s_1 ed s_2 è dato da $s^{\max} = s_1 + s_2$.

(4) Considerare il caso in cui la hamiltoniana è

$$H_1 = H_0 + \frac{3}{5}m\omega^2 x_1 x_2, \qquad (2)$$

con H_0 dato dalla Eq. (1), con $\Omega = \omega$, e le particelle hanno $s_1 = s_2 = 0$ ma non sono identiche. Determinare spettro e degenerazione.

(5) Determinare lo stato fondamentale e il primo stato eccitato e calcolare la loro degenerazione per la hamiltoniana H_0 Eq. (1) quando $\Omega = \omega$ nel caso di particelle identiche di spin $\frac{1}{2}$, supponendo che $\hbar^2 B \ll \hbar\omega$. Se le particelle avessero spin $s_1 = s_2 = 1$ l'energia e la degenerazione del primo stato eccitato cambierebbero o resterebbero le stesse del caso di spin $\frac{1}{2}$?
Suggerimento: notare che lo scambio di due particelle si ottiene cambiando il segno della coordinata relativa e ricordare le proprietà di parità delle autofunzioni di oscillatore armonico.

(6) Considerare quindi il caso in cui la hamiltoniana è data da

$$H_2 = H_0 + B'\left(s_1^z + 2s_2^z\right), \qquad (3)$$

con H_0 dato dalla Eq. (1), con $\Omega = \omega$ e s_1^z e s_2^z gli operatori terza componente dello spin delle due particelle e B' una costante reale positiva. Determinare al primo ordine la perturbazione dovuta al termine proporzionale a B' all'energia dello stato fondamentale e del primo stato eccitato dell'hamiltoniana H_0 per particelle identiche di spin $\frac{1}{2}$. Discutere per quali valori di B' l'approssimazione perturbativa è valida.

(7) Nel caso del sistema descritto dalla hamiltoniana Eq. (1) con $\omega = \Omega$ e $s_1 = s_2 = 0$, determinare la hamiltoniana in un sistema di riferimento rotante nel piano (x_1, x_2) con velocità angolare ω. Discutere se la degenerazione dello spettro della hamiltoniana nel sistema di riferimento rotante differisca da quella della hamiltoninana di partenza e perché.