ESAME SCRITTO DI MECCANICA QUANTISTICA

22 gennaio 2020

Tempo massimo 3 ore. Non sono ammessi libri o appunti

Considerare un sistema di due particelle di ugual massa m in una dimensione la cui dinamica è descritta dalla hamiltoniana

$$H = \frac{p_1^2}{2m} + \frac{p_2^2}{2m} + eE_1 x_1 + eE_2 x_2 + \frac{1}{2} m \left[\left(\omega_1^2 + \omega_2^2\right) \left(x_1^2 + x_2^2\right) + 2 \left(\omega_1^2 - \omega_2^2\right) x_1 x_2 \right] \quad (1)$$

dove x_i, p_i sono rispettivamente gli operatori posizione e impulso delle due particelle.

(1) Nel caso $\omega_1 = \omega_2$ e $E_1 = E_2 = 0$ determinare lo spettro e la degenerazione della hamiltoniana data, supponendo le particelle non identiche.

(2) Determinare la funzione d'onda di stato fondamentale della hamiltoniana data, nelle condizioni della domanda (1).

(3) Determinare ora lo spettro e la degenerazione nel caso $\omega_1 = \omega_2$ ma $E_1 \neq E_2 \neq 0$.

(4) *Domanda di teoria:* Dimostrare che per una particella tridimensionale l'operatore momento angolare genera le rotazioni sullo spazio delle funzioni d'onda $\langle \vec{x} | \psi \rangle$.

(5) Nelle condizioni della domanda (1), determinare nel caso di particelle identiche l'energia e la degenerazione dello stato fondamentale e dei primi due livelli eccitati e scrivere la funzione d'onda in termini di funzioni d'onda di particella singola. Considerare i due casi in cui le due particelle soddisfano la statistica di Bose oppure di Fermi, in entrambi i casi nell'ipotesi che la funzione d'onda di spin sia simmetrica e si trovi in uno stato fissato (e quindi non contribuisca alla degenerazione).

A partire da questa domanda, supporre $E_1 = E_2 = 0$, $\omega_1 \neq \omega_2$, e particelle **non** *identiche.*

(6) Determinare esattamente lo spettro della hamiltoniana, eseguendo una trasformazione di coordinate $x'_i = V_{ij} x_j$ che permetta di separare il problema.

(7) Nel caso in cui $|\omega_1^2 - \omega_2^2| \ll |\omega_1^2 + \omega_2^2|$ trattare il termine proporzionale a $x_1 x_2$ nella hamiltoniana Eq. (1) come perturbazione, e determinare al primo ordine perturbativo la correzione all'energia dello stato fondamentale e del primo stato eccitato della hamiltoniana imperturbata. Confrontare il risultato perturbativo con il risultato esatto trovato al punti precedente.

(8) Determinare l'operatore O tale che

$$\langle x'_1 x'_2 | \psi \rangle = \langle x_1 x_2 | O | \psi \rangle, \quad (2)$$

dove le coordinate x_i e x'_i sono quelle della domanda (6).