ESAME SCRITTO DI MECCANICA QUANTISTICA I

14 febbraio 2007

Tempo massimo 3 ore. Non sono ammessi libri o appunti

Si consideri un sistema di due particelle in tre dimensioni, che interagiscono tra di loro con un potenziale armonico, e soggette ad un campo elettrico E diretto lungo l'asse z. Questo sistema è descritto dall'hamiltoniana

$$H = \frac{\vec{p}_1^2}{2m} + \frac{\vec{p}_2^2}{2m} - \frac{1}{2}m\omega^2|\vec{x}_1 - \vec{x}_2|^2 - e_1 E x_1^{(3)} - e_2 E x_2^{(3)}, \qquad (1)$$

dove $\vec{p}_i$ ed $\vec{x}_i$ sono rispettivamente gli operatori impulso e posizione per le due particelle, $x_1^{(3)}$ e $x_2^{(3)}$ sono le componenti lungo l'asse z degli operatori posizione per le due particelle rispettivamente, mentre e_1, e_2 (cariche elettriche) ed E sono costanti reali positive.

(1) Attraverso un opportuno cambio di variabili separare il moto relativo dal moto del baricentro e riscrivere l'hamiltoniana eq. (1) nella forma

$$H = H_b + H_r \qquad (2),$$

dove H_b ed H_r dipendono rispettivamente solo da posizioni ed impulsi del baricentro e relativi.

(2) Determinare il commutatore dell'hamiltoniana relativa H_r eq. (2) con gli operatori L_z ed $L^2 \equiv \vec{L} \cdot \vec{L}$, dove L^i è l'operatore di componenti

$$L^i = \epsilon^{ijk} \left(x_1^j - x_2^j \right) \frac{1}{2} \left(p_1^k - p_2^k \right). \qquad (6)$$

Commentare il risultato.

(3) Supporre che il campo elettrico E sia sufficientemente debole da poter essere trattato come una perturbazione. Calcolare al primo ed al secondo ordine perturbativo la correzione allo spettro di autovalori dell'hamiltoniana relativa H_r dovuto a tale perturbazione.

Suggerimento: Ricordare che per un oscillatore armonico *unidimensionale* vale

$$\langle m|q|n\rangle = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}(\sqrt{n+1}\delta_{m,n+1} + \sqrt{n}\delta_{m,n-1}).$$

(4) Dimostrare che lo spettro dell'hamiltoniana relativa in presenza di campo elettrico può essere determinato esattamente, e confrontare il risultato con quello perturbativo trovato al punto precedente. Determinare la degenerazione dello spettro.

(5) Supporre ora $e_1 = e_2$ e che le particelle siano identiche e di spin 1/2. Determinare lo spettro dell'hamiltoniana relativa (a) nel caso in cui non ci sia interazione tra gli spin e (b) nel caso in cui, oltre all'interazione eq. (1), vi sia un'interazione spin-spin della forma

$$H_s = \frac{B}{\hbar}\vec{\sigma}_1\vec{\sigma}_2. \qquad (7)$$

(6) Determinare la degenerazione dello spettro dell'hamiltoniana relativa nei due casi della domanda precedente.