ESAME SCRITTO DI MECCANICA QUANTISTICA I

19 febbraio 2009

Tempo massimo 3 ore. Non sono ammessi libri o appunti

Considerare un sistema formato da due particelle libere di spin $\frac{1}{2}$ di uguale massa m (ma non identiche) in tre dimensioni, la cui dinamica è descritta dall'hamiltoniana

$$H = \frac{\vec{p}_1^2}{2m} + \frac{\vec{p}_2^2}{2m} + V(\vec{x}_1) + V(\vec{x}_2) + H_s(\vec{\sigma}_1, \vec{\sigma}_2), \tag{1}$$

dove $\vec{x}_i$, $\vec{p}_i$ e $\vec{\sigma}_i$ sono rispettivamente gli operatori posizione, impulso e spin per le due particelle; il potenziale $V(\vec{x}_i)$ è dato da

$$V(\vec{x}_i) = W_1(x_i^{(1)}) + W_2(x_i^{(2)}) + W_3(x_i^{(3)}) \tag{2}$$

dove $x_i^{(j)}$ è la j–esima componente del vettore $\vec{x}_i$ e

$$W_j(z) = \begin{cases} 0 \text{ se } |z| \le a_j \\ \infty \text{ se } |z| > a_j \end{cases}; \tag{3}$$

e l'interazione di spin è data da

$$H_s(\sigma_1, \sigma_2) = B_0 \vec{\sigma}_1 \cdot \vec{\sigma}_2, \tag{4}$$

con B_0 una costante reale positiva.

(1) Esprimere le autofunzioni e gli autovalori dell'hamiltoniana eq. (1) in termini di autofunzioni ed autovalori di H_s e di opportune hamiltoniane unidimensionali.

(2) Determinare lo spettro dell'hamiltoniana H_s.

(3) Numerando i livelli energetici dell'hamiltoniana complessiva Eq. (1) come $E_0 < E_1 < E_2 < \ldots$, determinare l'energia e la degenerazione dei livelli E_0, E_1 ed E_2, cioè dello stato fondamentale e dei primi due stati eccitati: (a) nel caso in cui $a_1 = a_2 = a_3$; (b) nel caso in cui $a_1 < a_2 < a_3$. Supporre che B_0 sia tale che l'ordinamento dei livelli sia lo stesso che nel caso $B_0 = 0$, e, nel caso b, supporre che a_1, a_2 ed a_3 siano numeri incommensurabili.

(4) Supporre ora che le due particelle siano identiche: rispondere nuovamente alla domanda precedente (nei due casi), scrivendo inoltre esplicitamente le autofunzioni di energia in tutti i casi considerati.

(5) Determinare la condizione su B_0 affinché l'ordinamento di tutti i livelli dello spettro dell'hamiltoniana complessiva Eq. (1) sia lo stesso che nel caso $B_0 = 0$ (considerare il caso di particelle non identiche).

(6) A partire dal tempo $t = 0$ la dinamica del sistema è descritta dalla hamiltoniana $H_1 = H + V_s$, dove H è data dalla eq. (1), e l'ulteriore potenziale V_s è

$$V_s = B_1 s_{\text{tot}}^{(1)}$$

dove $s_{\text{tot}}^{(1)}$ è l'operatore spin totale del sistema di due particelle lungo l'asse x. Supponendo che a $t = 0$ il sistema sia stato preparato in un autostato di spin totale lungo l'asse z con autovalore $+1$, determinare la probabilità che al tempo t esso abbia subito una transizione ad un autostato di spin totale lungo l'asse z con autovalore -1.