ESAME SCRITTO DI MECCANICA QUANTISTICA I

14 febbraio 2011

Tempo massimo 3 ore. Non sono ammessi libri o appunti

Si consideri un sistema di due particelle cariche tridimensionali che interagiscono tra di loro con un potenziale armonico e soggette ad un campo elettrico costante $\vec{E}$. La dinamica del sistema è descritta dalla hamiltoniana

$$H = \frac{\vec{p}_1^2}{2m} + \frac{\vec{p}_2^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2(\vec{x}_1 - \vec{x}_2)^2 + e_1\vec{E}\cdot\vec{x}_1 + e_2\vec{E}\cdot\vec{x}_2, \tag{1}$$

dove $\vec{p}_i$ ed $\vec{x}_i$ sono rispettivamente gli operatori impulso e posizione per le due particelle, $\vec{E}$ è il vettore campo elettrico, costante a componenti reali, e m ed e_i sono rispettivamente la massa (uguale) e la carica (in generale diversa) delle particelle.

(1) Attraverso un opportuno cambio di variabili, separare nell'hamiltoniana Eq. (1) il moto del baricentro dal moto relativo.

(2) Determinare la dipendenza temporale degli operatori posizione ed impulso del baricentro in rappresentazione di Heisenberg.

(3) Scrivere le equazioni del moto in rappresentazione di Heisenberg per gli operatori posizione ed impulso relativi.

(4) Determinare lo spettro dell'hamiltoniana relativa in assenza di campo elettrico, e quindi, trattando il campo elettrico come una perturbazione, determinare la degenerazione dello spettro di energia al primo ed al secondo ordine perturbativo (il calcolo esplicito completo della perturbazione degli autovalori di energia non è richiesto qui, vedere domanda (7)). Qual è il parametro la cui piccolezza garantisce l'accuratezza dello sviluppo perturbativo?
Suggerimento: scegliere opportunamente il sistema di riferimento e il tipo di coordinate (cartesiane, polari o sferiche).

(5) Supporre ora che $e_1 = e_2$, che le due particelle abbiano entrambe spin $\frac{1}{2}$ e che l'hamiltoniana del sistema sia $H_{\text{tot}} = H + H_s$ con H data dalla Eq. (1) e

$$H_s = \kappa\vec{s}\cdot\vec{L}, \tag{2}$$

dove $\vec{s}$ è lo spin totale mentre $\vec{L}$ è il momento angolare relativo del sistema, e κ è un parametro reale positivo. Determinare lo spettro dell'hamiltoniana relativa e la sua degenerazione (supporre che κ sia generico).
Suggerimento: riconsiderare la scelta di sistema di riferimento e tipo di coordinate.

(6) Discutere come cambia la risposta alla domanda precedente qualora le due particelle siano identiche.

(7) Nel caso $\kappa = 0$ ma $e_1 \neq e_2$, determinare *esattamente* lo spettro dell'hamiltoniana relativa. Confrontare il risultato con il calcolo perturbativo esplicito al secondo ordine, e discutere il risultato ottenuto.