ESAME SCRITTO DI MECCANICA QUANTISTICA I

1 marzo 2013

Tempo massimo 3 ore. Non sono ammessi libri o appunti

Considerare un sistema formato da due particelle di spin $\frac{1}{2}$ ed uguale massa m (ma non necessariamente identiche) in una dimensione, la cui dinamica è descritta dall'hamiltoniana

$$H = \frac{p_1^2}{2m} + \frac{p_2^2}{2m} + \frac{1}{2}kx_1^2 + \frac{1}{2}kx_2^2 + \alpha x_1 x_2 - \lambda \vec{s}_1 \cdot \vec{s}_2, \tag{1}$$

dove x_i, p_i e $\vec{s}_i$ sono rispettivamente gli operatori posizione, impulso e spin per le due particelle, e k, α e λ sono tutte costanti reali positive, con $\alpha \ll k$, $\lambda \ll \frac{\omega\alpha}{k}$, con $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$.

(1) Si riscriva l'hamiltoniana Eq. (1) in termini di coordinate relativa e del baricentro, e dei corrispondenti impulsi.

(2) Sfruttando il risultato della domanda precedente, supponendo le particelle non identiche, si determinino lo spettro dell'hamiltoniana e la sua degenerazione.

(3) Si consideri ora il termine proporzionale ad α come una perturbazione. Si determinino lo spettro e la degenerazione del problema imperturbato. Si determini quindi al primo ordine perturbativo l'effetto della perturbazione sull'energia e sulla degenerazione dello stato fondamentale e del primo stato eccitato dell'hamiltoniana spaziale (cioè non di spin).

(4) Si ottenga il risultato della domanda (3) attraverso una sviluppo del risultato ottenuto al punto (2).

(5) Si supponga ora che le due particelle siano identiche. Si determinino i primi tre livelli energetici del sistema e la corrispondente degenerazione nel caso in cui $\alpha = 0$.

(6) Si determinino ora (esattamente) i primi tre livelli energetici e la corrispondente degenerazione nel caso in cui $\alpha \neq 0$.

(7) Si supponga ora che il sistema sia preparato al tempo $t = -\infty$ nel primo stato eccitato dell'hamiltoniana spaziale nel caso $\alpha = 0$ (particelle identiche). Si supponga che il termine proporzionale ad α venga acceso al tempo $t = 0$ e spento al tempo $t = t_0$. Usando la teoria perturbativa dipendente dal tempo al primo ordine, si determini la probabilità che al tempo $t = \infty$ il sistema abbia subito una transizione ad un qualunque autostato dell'hamiltoniana di partenza diverso da quello in cui è stato preparato. Si determini il valore di t_0 per cui questa probabilità è massima.