ESAME SCRITTO DI MECCANICA QUANTISTICA I

4 marzo 2011

Tempo massimo 3 ore. Non sono ammessi libri o appunti

Si consideri una particella tridimensionale di spin $\frac{1}{2}$ la cui dinamica è descritta dalla hamiltoniana

$$H = \frac{1}{2m}\left(\vec{p} - \vec{A}(\vec{x})\right)^2 - \frac{1}{m}\vec{s}\cdot\vec{B}, \tag{1}$$

dove $\vec{s}$ è l'operatore spin della particella data, e $\vec{A}(\vec{x})$ è una funzione dell'operatore posizione $\vec{x}$ tale che

$$\epsilon^{ijk}\partial_j A_k(\vec{x}) = B^i(\vec{x}). \tag{2}$$

(1) Si determini, usando la rappresentazione di Heisenberg, $\vec{v} \equiv \frac{d}{dt}\vec{x}$ (operatore velocità).

(2) Si determini il commutatore tra due componenti qualunque dell'operatore velocità $[v^i, v^j]$, e si esprima il risultato in termini di $B^i(\vec{x})$ definito nella Eq. (2).

(3) Si dimostri che la hamiltoniana Eq. (1) può essere scritta nella forma

$$H = \frac{m}{2}\left(\vec{\sigma}\cdot\vec{v}\right)^2, \tag{3}$$

dove σ^i sono le matrici di Pauli, e $\vec{v}$ è l'operatore veolcità determinato al punto (1). *Suggerimento:* si ricordi che $[\sigma^i, \sigma^j] = 2i\epsilon^{ijk}\sigma_k$ e $\{\sigma^i, \sigma^j\} = 2\delta^{ij}$.

(4) Si supponga ora che $\vec{B}$ sia un vettore costante diretto lungo l'asse z di lunghezza B. Si dimostri che in tal caso la hamiltoniana Eq. (3) può essere scritta come la somma di tre hamiltoniane commutanti,

$$H = H_\perp + H_z + H_s, \tag{4}$$

dove $H_\perp$ non dipende dalle componenti lungo l'asse z degli operatori posizione ed impulso, mentre tutta la dipendenza dallo spin è contenuta in H_s. Si dimostri che L_z è una costante del moto.

(5) Si determini lo spettro dell'hamiltoniana H.
Suggerimento: per determinare lo spettro di $H_\perp$ si esegua il cambiamento di variabili

$$q = \frac{m}{B}v_x; \qquad p = mv_y. \tag{5}$$

(6) Si aggiunga all'hamiltoniana la perturbazione dipendente dal tempo

$$H(t) = -\lambda q e^{-t^2/\tau^2}, \tag{6}$$

dove q è l'operatore definito nella Eq. (5) e λ e τ sono costanti reali positive. Si determini la probabilità che, se al tempo $t = -\infty$ il sistema si trova nello stato fondamentale di $H_\perp$, al tempo $t = +\infty$ esso si trovi in un qualunque altro autostato di energia.

(7) Si determini la degenerazione dello spettro dell'hamiltoniana H e la si giustifichi in termini di operatori che commutano con l'hamiltoniana.
Suggerimento: si scriva l'hamiltoniana H_s in termini di operatori di innalzamento ed abbassamento.