ESAME SCRITTO DI MECCANICA QUANTISTICA I

20 giugno 2007

Tempo massimo 3 ore. Non sono ammessi libri o appunti

Si consideri una particella di massa m in *due* dimensioni, la cui dinamica è descritta dall'hamiltoniana

$$H = \frac{\vec{p}^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega_1 x_1^2 + \frac{1}{2}m\omega_2 x_2^2 + \lambda x_1 x_2, \tag{1}$$

dove $\vec{p}$ è l'operatore impulso bidimensionale e $\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ è l'operatore posizione di componenti x_i.

(1) Si esegua il cambio di coordinate

$$\begin{cases} x_1 = x_1' \cos\phi + x_2' \sin\phi \\ x_2 = -x_1' \sin\phi + x_2' \cos\phi \end{cases} \tag{2}$$

Si determini la relazione tra l'operatore impulso $\vec{p}'$ nelle nuove coordinate e l'operatore impulso $\vec{p}$ nelle vecchie coordinate, e si verifichi che gli operatori $\vec{x}'$ e p' soddisfano le corrette relazioni di commutazione per operatori posizione ed impulso. Si scriva quindi l'hamiltoniana eq. (2) nel nuovo sistema di coordinate. A che trasformazione corrisponde la eq. (2)?

(2) Si dimostri che scegliendo opportunamente il valore di ϕ nella eq. (2) l'hamiltoniana eq. (1) nelle nuove coordinate prende la forma dell'hamiltoniana di un oscillatore armonico bidimensionale. Nel caso $\omega_1 = \omega_2$ si determinino lo spettro di questo oscillatore armonico e la sua degenerazione.
Suggerimento: Si ricordino le identità $2\sin\phi\cos\phi = \sin 2\phi$ e $\cos^2\phi - \sin^2\phi = \cos 2\phi$.

(3) Nel caso $\omega_1 = \omega_2$ si riscriva l'hamiltoniana eq. (1) in coordinate polari (r, θ) definite da

$$\begin{cases} x_1' = r\cos\theta \\ x_2' = r\sin\theta \end{cases},$$

dove le coordinate $\vec{x}'$ sono quelle, determinate alla domanda precedente, rispetto alle quali l'hamiltoniana ha la forma di oscillatore armonico bidimensionale. Si determini qundi l'operatore R tale per cui

$$R^\dagger H(\vec{x}, \vec{p}) R = H(\vec{x}', \vec{p}'). \tag{3}$$

Suggerimento: Per determinare l'operatore cinetico in coordinate polari, si calcoli $(x_1 p_2 - x_2 p_1)^2$ e si sfruttino le identità

$$\begin{aligned} x_1 p_1 + x_2 p_2 &= -i\hbar \frac{\partial}{\partial r} \\ x_1 p_2 - x_2 p_1 &= -i\hbar \frac{\partial}{\partial \theta} \end{aligned} \qquad (4).$$

(4) Si consideri ora il termine proporzionale a λ nell'hamiltoniana eq. (1) come una perturbazione dell'hamiltoniana ottenuta ponendo $\lambda = 0$, nel caso $\omega_1 \neq \omega_2$. Si determini la perturbazione agli autovalori dell'hamiltoniana dovuta a questo termine fino al primo ordine al quale essa non è nulla.
Suggerimento: Si ricordi che per un oscillatore armonico *unidimensionale*

$$\langle m|x|n\rangle = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}} \left(\delta_{m,n+1}\sqrt{n+1} + \delta_{m,n-1}\sqrt{n}\right) .$$

(5) Si discuta ora come cambia la trattazione della pertrubazione discussa al punto precedente quando $\omega_1 = \omega_2$. In particolare, si determini esplicitamente la perturbazione al primo livello eccitato in tal caso fino al primo ordine al quale essa non è nulla.

(6) Si confronti il risultato del calcolo perturbativo quando $k_1 \neq k_2$ (punto 4) con il risultato esatto (punto 2).