ESAME SCRITTO DI MECCANICA QUANTISTICA I

17 giugno 2009

Tempo massimo 3 ore. Non sono ammessi libri o appunti

Considerare un sistema formato da due particelle di uguale massa m (ma non necessariamente identiche) in una dimensione, la cui dinamica è descritta dall'hamiltoniana

$$H = \frac{p_1^2}{2m} + \frac{p_2^2}{2m} + \frac{1}{2} m \left[\omega_1^2 \left(x_1^2 + x_2^2 \right) - 2\omega_2^2 x_1 x_2 \right], \tag{1}$$

dove x_i e p_i sono rispettivamente gli operatori posizione e impulso per le due particelle.

(1) Si consideri la trasformazione di coordinate

$$\left\{ \begin{array}{l} x_1' = x_1 + x_2 \\ x_2' = x_1 - x_2 \end{array} \right. \tag{2}$$

Si determininino gli operatori impulso p_i' relativi alle nuove coordinate e si verifichi che gli operatori x_i' e p_i' soddisfano le corrette relazioni di commutazione per operatori posizione ed impulso.

(2) Si determini lo spettro di autovalori dell'hamiltoniana eq. (1) sfruttando il cambio di coordinate eq. (2).

(3) Nel caso in cui $\omega_1 = \omega_2$, si determini la funzione d'onda per lo stato fondamentale dell'hamiltoniana eq. (1), e si discuta la condizione di normalizzazione che essa soddisfa.

(4) Si supponga ora che le due particelle siano dotate di spin, e che l'hamiltoniana totale del sistema sia

$$H_t = H + H_s, \tag{3}$$

cioè la somma dell'hamiltoniana eq. (1) e di una hamiltoniana di spin data da

$$H_s = g(\vec{s}_1 \cdot \vec{s}_2 + \vec{s}_1 \cdot \vec{s}_3 + \vec{s}_2 \cdot \vec{s}_3), \tag{4}$$

dove s_1 ed s_2 sono gli operatori di spin relativi alle due particelle, $\vec{s}_3$ è l'operatore di spin relativo ad una terza particella, e g è una costante reale positiva. Si supponga che la terza particella abbia spin $\frac{1}{2}$. Si determini lo spettro dell'hamiltoniana H_t eq. (3), con $\omega_1 \neq \omega_2$, nei due casi (a) in cui le prime due particelle hanno entrambe spin $\frac{1}{2}$; (b) in cui le prime due particelle hanno entrambe spin 1.

(5) Si determini nuovamente lo spettro di H_t eq. (3) supponendo ora che le prime due particelle siano identiche; si determini inoltre la degenerazione dello spettro.

(6) Si supponga che al tempo $t = 0$ il sistema descritto dall'hamiltoniana eq. (1) (con $\omega_1 \neq \omega_2$ ed in assenza di spin) si trovi nello stato fondamentale, e che su di esso agisca la perturbazione

$$H_p(t) = -E(x_1 - x_2)e^{-bt}, \tag{5}$$

dove E è una costante reale positiva. Si determini la probabilità che al tempo $t = \infty$ il sistema si trovi in qualunque altro autostato dell'hamiltoniana.