ESAME SCRITTO DI MECCANICA QUANTISTICA I

21 giugno 2011

Tempo massimo 3 ore. Non sono ammessi libri o appunti

Considerare un sistema di due particelle di spin $\frac{1}{2}$ in tre dimensioni, la cui dinamica è descritta dalla hamiltoniana

$$H = \frac{\vec{p}_1^2}{2m_1} + \frac{\vec{p}_2^2}{2m_2} - \frac{e^2}{|\vec{x}_1 - \vec{x}_2|} + \lambda \vec{S}_1 \cdot \vec{S}_2, \tag{1}$$

dove $\vec{p}_i$, $\vec{x}_i$ ed S_i sono rispettivamente gli operatori impulso, posizione e spin per le due particelle, aventi masse m_i e cariche elettriche di modulo e ed opposte in segno.

(1) Attraverso un opportuno cambio di variabili, separare nell'hamiltoniana Eq. (1) il moto del baricentro dal moto relativo.

(2) Si supponga che al tempo $t = 0$ il sistema si trovi nello stato fondamentale dell' hamiltoniana spaziale relativa, e che le due particelle siano in autostati di spin opposto. Determinare il valore della distanza tra le due particelle per cui la probabilità di posizione è massima.

(3) Scrivere la funzione d'onda del punto precedente come sovrapposizione di autostati dell'hamiltoniana.

(4) Determinare la funzione d'onda del sistema a qualunque tempo t successivo.

(5) Determinare la probabilità che al tempo t lo spin della prima particella sia rivolto all'insù.

Suggerimento: Scrivere il risultato della domanda precedente nella base degli autostati di spin delle due particelle.

(6) Considerare ora il caso in cui l'hamiltoniana contiene un termine di accoppiamento con un campo magnetico $\vec{B}$:

$$H_B = H + \vec{B} \cdot \vec{\mu}, \tag{2}$$

dove H è l'hamiltoniana Eq. (1), $\vec{B}$ è un vettore fisso e l'operatore $\vec{\mu}$ (momento di dipolo) è dato, in termini degli spin $\vec{S}_i$ e dell'operatore momento angolare (relativo) del sistema di due particelle, da

$$\vec{\mu} = \mu_r \vec{L} + \mu_1 \vec{S}_1 + \mu_2 \vec{S}_2, \tag{3}$$

dove μ_i sono costanti reali. Determinare al primo ordine perturbativo l'effetto dell'inclusione di questo termine sull'energia di ciascuno dei due autostati dell'hamiltoniana di cui lo stato dato è sovrapposizione.

(7) Spiegare, utlizzando il formalismo della matrice densità dei sottosistemi, perché le due correzioni perturbative calcolate al punto precedente siano o meno uguali tra di loro.