ESAME SCRITTO DI MECCANICA QUANTISTICA I

19 giugno 2013

Tempo massimo 3 ore. Non sono ammessi libri o appunti

Si consideri una coppia di particelle in tre dimensioni, "protone" ed "elettrone", rispettivamente di massa m_p ed m_e, aventi entrambe spin $\frac{1}{2}$, e la cui dinamica è descritta dalla hamiltoniana

$$H_0 = \frac{\vec{p}_p^2}{2m_p} + \frac{\vec{p}_e^2}{2m_e} - \frac{e^2}{|\vec{x}_e - \vec{x}_p|} + \frac{1}{2} m_p \omega^2 \vec{x}_p^2 + \frac{1}{2} \frac{m_e^2}{m_p} \omega^2 \vec{x}_e^2 + m_e \omega^2 \vec{x}_p \cdot \vec{x}_e + \lambda \vec{s}_e \cdot \vec{s}_p, \qquad (1)$$

dove $\vec{x}$, $\vec{p}$ e $\vec{s}$ sono rispettivamente gli operatori posizione, impulso e spin delle due particelle e λ è una costante reale positiva. (I nomi "protone" ed "elettrone" vanno considerati come convenzionali. Non è richiesta alcuna conoscenza di fisica della materia.)

(1) Separare il moto del baricentro dal moto relativo. Che forma assume l'hamiltoniana quando $m_p >> m_e$?

(2) Determinare l'energia dello stato fondamentale dell'hamiltoniana, e scriverne esplicitamente la funzione d'onda, usando la base delle coordinate per la parte spaziale. Non è necessario determinare la normalizzazione, ed è consentito (ma non obbligatorio) scrivere il risultato nel caso in cui $m_p >> m_e$.

(3) Supponendo che la terza componente dello spin sia $s_z^p = +\frac{1}{2}$ per il protone e $s_z^e = -\frac{1}{2}$ per l'elettrone, scrivere la funzione d'onda di spin del sistema come sovrapposizione di autostati dello spin totale $\vec{s} = \vec{s}_e + \vec{s}_p$.

(4) Scrivere la funzione d'onda al tempo t supponendo che al tempo $t = 0$ il sistema si trovi nello stato di spin dato al punto precedente, ed utilizzare il risultato per determinare la probabilità che ad un tempo t qualunque una misura dello spin dell'elettrone dia come risultato $s_z^e = +\frac{1}{2}$.

(5) Supponendo che il sistema si trovi in uno stato in cui il momento angolare orbitale del moto relativo e la sua terza componente sono $l = m = 1$, mentre la funzione d'onda di spin è quella del punto (3), determinare: (a) il minimo valore dell'energia del sistema; (b) la probabilità che una misura di momento angolare totale del sistema dia come risultato $j = 0$.

(6) Si supponga ora che nella regione in cui $|\vec{x}_e - \vec{x}_p| > r_0$ il potenziale dato nella Eq. (1) sia schermato, ossia che l'hamiltoniana abbia la forma della Eq. (1) quando $|\vec{x}_e - \vec{x}_p| \le r_0$, mentre se $|\vec{x}_e - \vec{x}_p| > r_0$ allora la hamiltoniana si ottiene dalla Eq. (1) mediante la sostituzione

$$-\frac{e^2}{|\vec{x}_e - \vec{x}_p|} \to -\frac{e^2}{|\vec{x}_e - \vec{x}_p|} e^{-\tau(|\vec{x}_e - \vec{x}_p| - r_0)}, \qquad (2)$$

dove τ è una costante reale positiva. Si determini in tal caso la correzione all'energia dello stato fondamentale al primo ordine della teoria delle perturbazioni, ed al primo ordine in τ.