ESAME SCRITTO DI MECCANICA QUANTISTICA I

12 luglio 2007

Tempo massimo 3 ore. Non sono ammessi libri o appunti

Si consideri un sistema tridimensionale la cui dinamica è descritta dall'hamiltoniana

$$H_0 = \frac{\vec{p}^2}{2m} - \frac{e^2}{|\vec{x}|} \tag{1}$$

dove $\vec{p}$ e $\vec{x}$ sono rispettivamente gli operatori posizione ed impulso tridimensionali.

(1) Si scriva in coordinate sferiche l'operatore

$$D \equiv \vec{x} \cdot \vec{p} + \vec{p} \cdot \vec{x}. \tag{2}$$

Suggerimento: si ricordi la definizione dell'operatore impulso radiale.

(2) Si determini la dipendenza dal tempo $\frac{d}{dt}\langle\psi|D|\psi\rangle$ degli elementi di matrice dell' operatore D eq. (2) in uno stato $|\psi\rangle$ qualunque per un sistema la cui evoluzione temporale è determinata dall'hamiltoniana H_0 eq. (1).
Suggerimento: si consiglia di utilizzare la rappresentazione di Heisenberg.

(3) Si dimostri che in un autostato $|Elm;t\rangle$ dell'hamiltoniana eq. (1) (dove E, l, m numerano rispettivamente gli autovalori di energia, momento angolare, e terza componente del momento angolare) ad ogni tempo t il valor medio dell'operatore D eq. (2) è dato da

$$\langle Elm;t|D|Elm;t\rangle = \int_0^\infty \frac{d}{dr}\left[r^3\varphi^2_{El}(r)\right] dr, \tag{3}$$

dove $\varphi_{El}(r)$ è una funzione d'onda radiale opportunamente definita. Si usi il risultato per determinare la dipendenza dal tempo $\frac{d}{dt}\langle\psi|D|\psi\rangle$ nel caso particolare in cui $|\psi\rangle = |Elm;t\rangle$.
Suggerimento: Si noti che la funzione $\varphi_{El}(r)$ è reale.

(4) Si confrontino i risultati trovati per $\frac{d}{dt}\langle D\rangle$ in uno stato $|\psi\rangle$ generico (domanda 2) e in uno stato $|Elm;t\rangle$ (domanda 3), e si sfrutti questo confronto per determinare il valor medio degli operatori T e V definiti da

$$T \equiv \frac{\vec{p}^2}{2m}; \qquad V \equiv -\frac{e^2}{|\vec{x}|} \tag{4}$$

negli stati $|Elm;t\rangle$.

(5) Si determini la dipendenza dal tempo $\frac{d}{dt}\langle\psi|\vec{L}|\psi\rangle$ degli elementi di matrice dell' operatore momento angolare $\vec{L}$ in uno stato $|\psi\rangle$ qualunque per un sistema la cui evoluzione temporale è determinata dall'hamiltoniana H_0 eq. (1). Si commenti il risultato.

(6) Si consideri ora la nuova hamiltoniana

$$H = H_0 + BL_z, \tag{5}$$

dove H_0 è l'hamiltoniana eq. (1), B è una costante reale positiva e L_z è l'operatore terza componente del momento angolare. Si determini per un sistema soggetto alla hamiltoniana H eq. (5) la dipendenza dal tempo $\frac{d}{dt}\langle\psi|\vec{L}|\psi\rangle$ degli elementi di matrice dell' operatore momento angolare $\vec{L}$ (a) in uno stato qualunque e (b) in uno stato che al tempo $t = t_0$ coincide con un autostato $|Elm; t_0\rangle$ dell'hamiltoniana H_0.

(7) Si consideri come una perturbazione il termine proporzionale a B nell'hamiltoniana H eq. (5). Si determini al primo ordine perturbativo la correzione allo spettro di autovalori dell'hamiltoniana H_0 dovuta a tale termine, e si calcoli la degenerazione dello spettro perturbato.