ESAME SCRITTO DI MECCANICA QUANTISTICA I

22 luglio 2009

Tempo massimo 3 ore. Non sono ammessi libri o appunti

Si consideri un sistema di due particelle tridimensionali, la cui dinamica è descritta dalla hamiltoniana

$$H = \frac{\vec{p}_1^2}{2m} + \frac{\vec{p}_2^2}{2m} - \frac{Ze^2}{|\vec{x}_1 - \vec{x}_2|} + ZeEx_1^{(3)} - eEx_2^{(3)}, \tag{1}$$

dove $\vec{p}_i$ ed $\vec{x}_i$ sono rispettivamente gli operatori impulso e posizione per le due particelle, $x_i^{(3)}$ sono le componenti lungo l'asse z dei due operatori posizione, e Z, e ed E sono costanti reali positive.

(1) Attraverso un opportuno cambio di variabili, separare nell'hamiltoniana Eq. (1) il moto del baricentro dal moto relativo.

(2) Determinare la dipendenza temporale degli operatori posizione ed impulso del baricentro in rappresentazione di Heisenberg.

(3) Scrivere le equazioni del moto in rappresentazione di Heisenberg per gli operatori posizione ed impulso relativi (in coordinate cartesiane).

(4) Sfruttando il risultato della domanda precedente, dimostrare che se $E = 0$, il valor medio dell'impulso relativo si conserva nello stato fondamentale del sistema dato. Che cosa succede negli altri autostati dell'hamiltoniana (sempre quando $E = 0$)?

(5) Si consideri ora il caso in cui E è sufficientemente piccolo da giustificare uno sviluppo perturbativo in questo parametro. Determinare la correzione all'energia dello stato fondamentale dell'hamiltoniana relativa imperturbata al primo ordine in E.

(6) Discutere la degenerazione del primo stato eccitato in assenza della perturbazione, e determinare la degenerazione al primo ordine, dando l'espressione esplicita degli autostati di energia a questo ordine (non è necessario determinare gli autovalori). *Suggerimento:* si ricordi che gli autostati del momento angolare $|lm>$ sono autostati dell'operatore parità $\mathcal{P}$ con autovalore $\mathcal{P}|lm>= (-1)^l|lm>$.

(7) Discutere quali operatori possano essere diagonalizzati simultaneamente alla hamiltoniana in presenza ed in assenza della perturbazione. Discutere inoltre come l'aggiunta alla hamiltoniana di un termine della forma $H_B = BL_z$ (con B una costante reale positiva e L_z la terza componente dell'operatore momento angolare) modifichi la degenerazione dello spettro.