ESAME SCRITTO DI MECCANICA QUANTISTICA I

19 luglio 2011

Tempo massimo 3 ore. Non sono ammessi libri o appunti.

Considerare un sistema formato da tre particelle di spin $\frac{1}{2}$ e di uguale massa m in una dimensione, la cui dinamica è descritta dall'hamiltoniana

$$H = \frac{p_1^2}{2m} + \frac{p_2^2}{2m} + \frac{p_3^2}{2m} + V(x_1) + V(x_2) + V(x_3) + H_s(\vec{s}_1, \vec{s}_2, \vec{s}_3), \tag{1}$$

dove x_i, p_i e $\vec{s}_i$ sono rispettivamente gli operatori posizione, impulso e spin per le due particelle ed il potenziale $V(x_i)$ ha la forma $V(x_i) = V_0(x_i)$ con

$$V_0(x_i) = \begin{cases} 0 \text{ se } |x_i| \le a \\ \infty \text{ se } |x_i| > a \end{cases}. \tag{2}$$

(1) Si scriva lo spettro degli autovalori dell'hamiltoniana supponendo che le tre particelle, pur avendo la stessa massa, non siano identiche e che si trovino in un autostato di H_s. Nelle stesse ipotesi, si determinino la degenerazione dello stato fondamentale e dei primi due stati eccitati dell'hamiltoniana spaziale.

(2) Si supponga ora che le particelle siano identiche. Supponendo sempre che il sistema si trovi un un autostato di H_s, ed inoltre che la funzione d'onda di spin sia completamente simmetrica, si determinino l'energia e la degenerazione dello stato fondamentale e se ne scriva esplicitamente la funzione d'onda spaziale.

(3) Si determini la correzione al primo ordine all'energia dello stato fondamentale quando al potenziale $V(x_i)$ Eq. (2) viene aggiunta una perturbazione:

$$V(x_i) = V_0(x_i) + \epsilon\delta(x_i) \tag{3}$$

(4) Si supponga che H_s abbia la forma $H_s = H_s^{(0)}$ con

$$H_s^{(0)}(\vec{s}_1, \vec{s}_2, \vec{s}_3) = \alpha(\vec{s}_1 \cdot \vec{s}_2 + \vec{s}_2 \cdot \vec{s}_3 + \vec{s}_3 \cdot \vec{s}_1), \tag{4}$$

dove α è una costante reale negativa. Si detetermino autostati, autovalori e degenerazioni per H_s, trascurando ai fini di questa domanda i gradi di libertà orbitali e l'identità delle particelle (nella determinazione degli autostati i valori esplicit dei coefficienti di Clebsch-Gordan non sono richiesti).

(5) Se l'hamiltoniana di spin ha la forma data dalla Eq. (4), si determini l'energia dello stato fondamentale dell'hamiltoniana totale sia quando $|\alpha| \ll \frac{1}{ma^2}$, sia quando $|\alpha| \gg \frac{1}{ma^2}$

(6) Si supponga ora che la hamiltoniana di spin sia data da

$$H = H_s^{(0)} + B\left(s_1^x + s_2^x + s_3^x\right), \tag{5}$$

dove s_I^x è la componente lungo l'asse x dell'operatore di spin per l'i-esima particella. Si supponga che il sistema si trovi nello stato fondamentale determinato al punto precedente nel caso $|\alpha| \gg \frac{1}{ma^2}$ e che una misura dello spin totale del sistema lungo l'asse z al tempo $t = 0$ dia come risultato $s_z^{\text{tot}} = \frac{3}{2}\hbar$. Qual è la probabilità che una misura di spin lungo lo stesso asse al tempo t dia lo stesso risultato?