**ESAME SCRITTO DI MECCANICA QUANTISTICA I**

11 luglio 2013

*Tempo massimo 3 ore. Non sono ammessi libri o appunti.*

Considerare un sistema formato da due particelle di spin $\frac{1}{2}$ e di uguale massa $m$ in tre dimensioni confinate all'interno di un parallelepipedo; la cui dinamica cioè è descritta dall'hamiltoniana

$$H = \frac{\vec{p}_1^2}{2m} + \frac{\vec{p}_2^2}{2m} + V(\vec{x}_1) + V(\vec{x}_2) + \vec{B} \cdot (\vec{s}_1 + \vec{s}_2)\,, \tag{1}$$

dove $\vec{x}_i$, $\vec{p}_i$ e $\vec{s}_i$ sono rispettivamente gli operatori posizione, impulso e spin per le due particelle. Il potenziale $V(\vec{x}_i)$ ha la forma

$$V(x_i) = \begin{cases} 0 \text{ se } |x_i^{(j)}| \leq a_j \\ \infty \text{ se } |x_i| > a_j \end{cases}\,, \tag{2}$$

dove $|x_i^{(j)}|$ è la $j$-esima componente dell'operatore posizione per la $i$-esima particella, e $a_1 > a_2 = a_3$ con $|a_1 - a_2| << a_2$.

(1) Si determinino la funzione d'onda, l'autovalore dell'energia e la degenerazione per lo stato fondamentale e per il primo ed il secondo stato eccitato supponendo che $\vec{B} = 0$ e che le particelle non siano identiche.

(2) Si risponda nuovamente alla domanda precedente, supponendo ora che le particelle siano identiche (e ancora $\vec{B} = 0$).

(3) Si risponda nuovamente alla domanda precedente, supponendo che le particelle **non** siano identiche, e $\vec{B}$ sia un vettore diretto lungo l'asse $z$, ed avente norma $|\vec{B}| \ll \frac{1}{a_1}$.

(4) Si supponga che al tempo $t = 0$ il sistema dato al punto (3) sia preparato in un autostato di spin totale, con valore della componente dello spin totale lungo l'asse $x$ pari a $s_x^{\text{tot}} = +1$. Si determini la probabilità che al tempo $t$ una misura di spin del sistema lo riveli in uno stato con $s_x^{\text{tot}} = +1$. Si supponga che non venga misurata l'energia.

(5) Rispondere nuovamente alla domanda del punto precedente supponendo che immediatamente prima della misura di spin si esegua una misura di energia, e che essa riveli il sistema nello stato fondamentale.

(6) Si supponga ora nuovamente di trovarsi nel caso di particelle identiche, con $\vec{B} = 0$ (come al punto 2). Si aggiunga all'hamiltoniana la perturbazione

$$H_\epsilon = \epsilon \frac{\pi^2 \hbar^2}{8 m a_1^4} \vec{x}_1 \cdot \vec{x}_2. \tag{3}$$

Si determinino la correzione al primo ordine allo stato fondamentale ed al primo livello eccitato.
*Suggerimento:* si ricordi l'integrale $\frac{1}{a} \int_{-a}^{a} dx\, x \cos \frac{\pi x}{2a} \sin \frac{\pi x}{a} = \frac{32a}{9\pi^2}$.