

# ESAME SCRITTO DI MECCANICA QUANTISTICA

18 luglio 2017

*Tempo massimo 3 ore. Non sono ammessi libri o appunti*

Considerare un sistema la cui dinamica è descritta dalla hamiltoniana

$$H = \frac{(\vec{L} + \vec{B})^2}{2I} \quad (1),$$

dove  $\vec{L} = \vec{x} \times \vec{p}$  sono gli operatori di momento angolare,  $I$  è una costante reale positiva, e  $\vec{B}$  è un vettore tridimensionale a componenti reali (non necessariamente positive).

- (1) Determinare gli autostati ed autovalori dell'hamiltoniana  $H$  Eq. (1) e la loro degenerazione, nel caso particolare in cui  $\vec{B} = 0$ .
- (2) Determinare le equazioni del moto alla Heisenberg per gli operatori  $\vec{L}$  per un sistema soggetto alla hamiltoniana  $H$  Eq. (1) (con  $\vec{B}$  qualunque).
- (3) *Domanda di teoria:* Dimostrare che l'operatore di momento angolare  $\vec{L} = \vec{x} \times \vec{p}$  genera le rotazioni su una generica funzione d'onda  $\psi(\vec{x})$ .
- (4) Supporre che il vettore  $\vec{B}$  sia diretto lungo l'asse  $z$ . Determinare la probabilità che se il sistema descritto dall'hamiltoniana al tempo  $t = 0$  si trova nello stato

$$|\phi_1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|11\rangle + |1-1\rangle) \quad (2)$$

al tempo  $t$  esso venga rivelato nello stato

$$|\phi_2\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|11\rangle - |1-1\rangle), \quad (3)$$

dove  $|lm\rangle = |1 \pm 1\rangle$  sono autostati del momento angolare.

Qual è l'interpretazione fisica degli stati  $|\phi_1\rangle$  e  $|\phi_2\rangle$ ?

- (5) Rispondere nuovamente alla domanda (1) ma ora nel caso in cui  $\vec{B}$  è un vettore qualunque.
- (6) Supporre ora che il sistema abbia spin  $\frac{1}{2}$ , e la sua hamiltoniana totale sia data da

$$H' = H + H_s \quad (4)$$

$$H_s = \lambda \vec{s} \cdot \vec{L}, \quad (5)$$

dove  $H$  è la hamiltoniana Eq. (1),  $\vec{s}$  è l'operatore di spin e  $\lambda$  è una costante reale positiva. Determinare lo spettro di  $H'$  al primo ordine della teoria delle perturbazioni in  $\lambda$ .

- (7) Supporre ora che il sistema sia posto in un sistema di riferimento rotante, attorno ad un asse parallelo a  $\vec{B}$ , con pulsazione  $\omega$ . Determinare lo spettro di energia nel sistema rotante se nel sistema a riposo l'hamiltoniana è la  $H$  Eq. (1) con  $\vec{B}$  generico (ma in assenza di spin, come nelle domande da (1) a (5)).