

# ESAME SCRITTO DI MECCANICA QUANTISTICA

16 luglio 2019

Tempo massimo 3 ore. Non sono ammessi libri o appunti.

Considerare un sistema formato da due particelle di spin  $\frac{1}{2}$  e di uguale massa  $m$  in tre dimensioni confinate all'interno di un parallelepipedo. La dinamica è descritta dalla hamiltoniana

$$H = \frac{\vec{p}_1^2}{2m} + \frac{\vec{p}_2^2}{2m} + V(\vec{x}_1) + V(\vec{x}_2) + \frac{\mu}{\hbar} \vec{B} \cdot (\vec{s}_1 + \vec{s}_2), \quad (1)$$

dove  $\vec{x}_i$ ,  $\vec{p}_i$  e  $\vec{s}_i$  sono rispettivamente gli operatori posizione, impulso e spin per le due particelle e  $\mu$  è una costante reale positiva. Il potenziale  $V(\vec{x}_i)$  ha la forma

$$V(x_i) = \begin{cases} 0 & \text{se } |x_i^{(j)}| \leq a_j \\ V_0 & \text{se } |x_i^{(j)}| > a_j \end{cases}, \quad (2)$$

dove  $x_i^{(j)}$  è la  $j$ -esima componente dell'operatore posizione per la  $i$ -esima particella,  $a_1 = a_2 = \frac{a_3}{2}$ ;  $\mu|\vec{B}| \ll E_0$ , dove  $E_0$  è l'energia dello stato fondamentale della hamiltoniana spaziale; e  $V_0 \rightarrow \infty$ . Si può supporre senza ledere la generalità  $\vec{B}$  diretto lungo l'asse  $z$ .

- (1) Si determinino, nel caso in cui le due particelle *non* sono identiche e con  $\vec{B} = 0$ , lo spettro di autovalori ed autofunzioni della hamiltoniana.
- (2) Si determini, sempre nel caso in cui le due particelle *non* sono identiche ma ora con  $\vec{B} \neq 0$  lo spettro di autovalori di energia della hamiltoniana. La hamiltoniana è separabile in questo caso?
- (3) Nel caso in cui le particelle sono identiche e con  $\vec{B} = 0$  si determinino l'energia, la degenerazione, e la funzione d'onda dello stato fondamentale e del primo stato eccitato del sistema.
- (4) Sempre nel caso in cui le particelle sono identiche ma ora con  $\vec{B} \neq 0$  si determinino l'energia, la degenerazione, e la funzione d'onda dello stato fondamentale e del primo stato eccitato del sistema.
- (5) Nel caso della domanda precedente, viene eseguita una misura di energia che rivela il sistema nello stato fondamentale, oppure nel primo stato eccitato, e subito dopo una misura della componente lungo l'asse  $z$  dello spin totale del sistema. Quali sono i risultati possibili della misura di spin, a seconda dei risultati della precedente misura di energia?
- (6) *Domanda di teoria:* Dimostrare che se tutti gli stati di un sistema di due particelle sono invarianti sotto lo scambio delle due particelle (cioè le particelle sono identiche) allora tutte le osservabili definite sul sistema sono invarianti sotto scambio.
- (7) Determinare le equazioni del moto alla Heisenberg per il sistema dato (non è necessario risolverle).
- (8) Al tempo  $t = 0$  il sistema viene preparato nello stato seguente: la parte spaziale è lo stato fondamentale della hamiltoniana spaziale (particelle non identiche), la terza componente dello spin totale vale  $s_z = +1$ . Il sistema evolve nel tempo con la hamiltoniana Eq. (1) con  $\vec{B} \neq 0$  e diretto lungo l'asse  $x$ . Qual è la probabilità di rivelare il sistema ad un tempo  $t$  nello stato fondamentale della domanda (2)?
- (9) Alla hamiltoniana Eq. (1) viene aggiunto un potenziale

$$V = \lambda \delta^{(3)}(\vec{x}_1 + \vec{x}_2). \quad (3)$$

Determinare la perturbazione al primo ordine all'energia dello stato fondamentale nella situazione della domanda (4) dovuta a questo potenziale.