ESAME SCRITTO DI MECCANICA QUANTISTICA I

19 settembre 2007

Tempo massimo 3 ore. Non sono ammessi libri o appunti

Si consideri un sistema formato da due particelle di spin $\frac{1}{2}$ e di massa diversa in in tre dimensioni, la cui dinamica è descritta dall'hamiltoniana

$$H_1 = H_r + H_s^{(1)} \tag{1}$$

$$H_r \equiv \frac{p^2}{2m} - \frac{e^2}{r} \tag{2}$$

$$H_s^{(1)} \equiv -\frac{\mu}{\hbar}\frac{\hbar}{2}\sigma_z^{(1)}, \tag{3}$$

dove p ed r sono rispettivamente il modulo degli operatori posizione ed impulso relativi, m è la massa ridotta, $\frac{\hbar}{2}\sigma_z^{(1)}$ è l'operatore di spin lungo l'asse z relativo alla prima particella, e μ è una costante realte positiva (σ_z è la matrice di Pauli).

(1) Si determini lo spettro dell'hamiltoniana eq. (1) (autovalori e loro degenerazione) e si calcolino i commutatori

$$[H_1, \sigma_x^{(1)}], \quad [H_1, \sigma_y^{(1)}], \tag{4}$$

dove $\frac{\hbar}{2}\sigma_x^{(1)}$, $\frac{\hbar}{2}\sigma_y^{(1)}$ sono gli operatori di spin relativi alla prima particella lungo gli assi x e y rispettivamente.

(2) Si determini il valor medio degli operatori $\sigma_x^{(1)}$ e $\sigma_y^{(1)}$ in un autostato dell'hamiltoniana eq. (1).

Suggerimento: si determini il valor medio in un autostato del commutatore calcolato al punto precedente.

(3) Si determini ora lo spettro (autovalori e loro degenerazione) dell'hamiltoniana

$$H_2 = H_r + H_s^{(2)} \qquad (5),$$

dove H_r è sempre data dalla eq. (2), mentre ora

$$H_s^{(2)} = -\lambda\,\vec{\sigma}^{(1)} \cdot \vec{\sigma}^{(2)} \qquad (6),$$

dove $\frac{\hbar}{2}\vec{\sigma}^{(1)}$, $\frac{\hbar}{2}\vec{\sigma}^{(2)}$ sono rispettivamente gli operatori di spin relativi alle due particelle e λ è una costante reale positiva.

(4) Si supponga che al tempo $t = 0$ il sistema si trovi nello stato fondamentale dell' hamiltoniana H_r eq. (2) e nello stato di spin

$$|\psi_s\rangle = |\uparrow\rangle^{(1)}|\downarrow\rangle^{(2)} \qquad (7),$$

dove $|\uparrow\rangle^{(i)}$, $|\downarrow\rangle^{(i)}$, $i = 1, 2$ sono gli autostati di spin

$$\frac{1}{2}\sigma_z^{(i)}|\uparrow\rangle^{(i)} = +\frac{1}{2}; \quad \frac{1}{2}\sigma_z^{(i)}|\downarrow\rangle^{(i)} = -\frac{1}{2}$$

per ciascuna delle due particelle. Si supponga che l'evoluzione temporale del sistema sia descritta dall'hamiltoniana H_2 eq. (6) e si determini lo stato del sistema al tempo t.

(5) Si determini la probabilità che, nel caso della domanda precedente, una misura di spin al tempo t dia come risultato: (a) $= -\frac{1}{2}$ per lo spin della particella 1; oppure (b) $= -\frac{1}{2}$ per lo spin della particella 1 e $= -\frac{1}{2}$ per lo spin della particella 2.

(6) Si determini al primo ordine perturbativo lo spettro (autovalori e loro degenerazione) dell' hamiltoniana

$$H_3 = H_r + H_s^{(1)} + H_s^{(2)} \qquad (8),$$

con H_r, $H_s^{(1)}$ e $H_s^{(1)}$ dati rispettivamente dalle eq. (2), (3) e (6), trattando $H_2 = H_r + H_s^{(2)}$ come hamiltoniana imperturbata, ed $H_s^{(1)}$ come perturbazione.