ESAME SCRITTO DI MECCANICA QUANTISTICA I

14 settembre 2009

Tempo massimo 3 ore. Non sono ammessi libri o appunti

Si consideri una particella bidimensionale la cui dinamica è descritta dalla hamiltoniana

$$H = \frac{\vec{p}^2}{2m} + \frac{1}{2} m\omega^2 \vec{q}^2 \qquad (1),$$

dove $\vec{p} = \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \end{pmatrix}$ ed $\vec{q} = \begin{pmatrix} q_1 \\ q2 \end{pmatrix}$ sono gli operatori impulso e posizione in due dimensioni.

(1) Definire gli operatori

$$\eta_i = \frac{1}{\sqrt{2m\omega\hbar}} \left(p_i - im\omega q_i \right). \qquad (2)$$

Determinare le relazioni di commutazione

$$[\eta_i, \eta_j^\dagger], \quad [\eta_i, \eta_j], \quad [\eta_i^\dagger, \eta_j^\dagger], \qquad (3)$$

ed esprimere l'hamiltoniana Eq. (1) in termini di questi operatori.

(2) Utilizzare il risultato della domanda precedente per determinare spettro e degenerazione dell'hamiltoniana Eq. (1).

(3) Definire gli operatori

$$\begin{aligned} j_1 &= \frac{1}{2}\left(\eta_1^\dagger \eta_2 + \eta_2^\dagger \eta_1\right) \\ j_2 &= \frac{1}{2i}\left(\eta_1^\dagger \eta_2 - \eta_2^\dagger \eta_1\right) \\ j_3 &= \frac{1}{2}\left(\eta_1^\dagger \eta_1 - \eta_2^\dagger \eta_2\right). \end{aligned} \qquad (4)$$

Determinare le relazioni di commutazione $[j_i, j_j]$.

(4) Quali tra gli operatori j_i, $j^2 = j_i^2 + j_2^2 + j_3^2$ e H possono essere diagonalizzati simultaneamente?

(5) Esprimere l'operatore j_2 in termini del generatore delle rotazioni nel piano bidimensionale su cui è definito il sistema dato. Notare inoltre che gli operatori j_i Eq. (4) e H Eq. (1) sono legati dall'identità

$$\left(j_i^2 + j_2^2 + j_3^2\right) = \frac{1}{4\hbar^2\omega^2}(H - \hbar\omega)(H + \hbar\omega), \qquad (5)$$

che si dimostra usando le relazioni di commutazione Eq. (3) (la dimostrazione non è richiesta). Utilizzare questi risultati e il risultato della domanda (4) per ottenere una determinazione dello spettro di H e della sua degenerazione in termini dello spettro e della degenerazione degli operatori j_i, j^2.

(6) Aggiungere all'hamiltoniana Eq. (1) la perturbazione

$$H' = \epsilon \left(\eta_1^\dagger \eta_1^\dagger \eta_2 \eta_2 + \eta_2^\dagger \eta_2^\dagger \eta_1 \eta_1 \right). \qquad (6)$$

Determinare al primo ordine l'effetto di questa perturbazione sull'energia e la degenerazione del secondo livello eccitato dell'hamiltoniana Eq. (1).