ESAME SCRITTO DI MECCANICA QUANTISTICA I

22 settembre 2011

Tempo massimo 3 ore. Non sono ammessi libri o appunti

Si consideri una particella bidimensionale la cui dinamica è descritta dalla hamiltoniana

$$H = \frac{\vec{p}^2}{2m} + \frac{1}{2} m\omega^2 \vec{x}^2 \qquad (1),$$

dove $\vec{p} = \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \end{pmatrix}$ ed $\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ sono gli operatori impulso e posizione in due dimensioni.

(1) Si definiscano gli operatori

$$a_i = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}} \left(x_i + i \frac{p_i}{m\omega} \right), \qquad (2)$$

dove gli indici i, j corrono sulle due componenti della coordinata spaziale. Si esprima l'hamiltoniana Eq. (1) in termini di questi operatori, e si usi il risultato per determinare lo spettro dell'hamiltoniana e la sua degenerazione.

(2) Si definiscano i quattro operatori

$$\eta_{ij} \equiv a_i^\dagger a_j, \qquad (3)$$

dove gli indici i, j prendono tutti i valori possibili, e si determini il commutatore di ciascuno di questi operatori con l'hamiltoniana Eq. (1). Si discuta quali di questi operatori possono essere diagonalizzati simultaneamente all'hamiltoniana.

(3) Si aggiunga all'hamiltoniana Eq. (1) una perturbazione

$$H' = \lambda \left(\eta_{12} + \eta_{21} \right), \qquad (4)$$

con η_{ij} definiti nella Eq. (3). Si enumerino gli stati degeneri corrispondenti al secondo stato eccitato E_2 (detto E_0 lo stato fondamentale) dell'hamiltoniana Eq. (1), e si determini la matrice della perturbazione in questo stato.

(4) Si usi il risultato della domanda precedente per determinare la correzione perturbativa al primo ordine al secondo stato eccitato.

(5) Si definiscano gli operatori

$$\begin{aligned} A_1 &= a_1 \cos\theta + a_2 \sin\theta \\ A_2 &= -a_1 \sin\theta + a_2 \cos\theta. \end{aligned} \qquad (5)$$

Si dimostri che gli operatori A_i, $A_j^\dagger$ soddisfano le stesse relazioni di commutazione degli operatori a_i, $a_j^\dagger$.

(6) Si esprimano sia l'hamiltoniana H_0, Eq. (1), che la perturbazione H', Eq. (4), in termini degli operatori A_i Eq. (5), con la scelta $\theta = \frac{\pi}{4}$, e si usi il risultato per determinare lo spettro dell'hamiltoniana perturbata in modo esatto. Si confronti il risultato con il calcolo perturbativo eseguito al punto (4).

(7) Si definiscano gli operatori

$$j_a \equiv \sum_{i,j=1}^{2} a_i^\dagger \sigma_{ij}^a a_j, \qquad (6)$$

dove σ_{ij}^a è la a–esima matrice di Pauli di componenti i, j. Si determinino le relazioni di commutazione dei tre operatori j_a fra di loro. Si usi il risultato per interpretare i risultati trovati per lo spettro sia nel caso imperturbato che nel caso perturbato.