ESAME SCRITTO DI MECCANICA QUANTISTICA I

16 settembre 2013

Tempo massimo 3 ore. Non sono ammessi libri o appunti

Si consideri una particella tridimensionale la cui dinamica è descritta dall'hamiltoniana

$$H_0 = \frac{1}{2m}\left(\vec{p} - \vec{A}(\vec{x})\right)^2, \tag{1}$$

dove $\vec{A}(\vec{x})$ è una funzione dell'operatore posizione $\vec{x}$.

(1) Si determini, usando la rappresentazione di Heisenberg, $\vec{v} \equiv \frac{d}{dt}\vec{x}$ (operatore velocità) e si calcoli il commutatore $[v^i, v^j]$ tra due componenti qualunque di tale operatore. Si esprima il risultato in termini di $B^i = \epsilon^{ijk}\partial_j A_k(\vec{x})$.

(2) Si determinino le equazione del moto (alla Heisenberg) per le componenti v^i dello operatore velocità $\vec{v}$.

Si supponga d'ora in poi che

$$\vec{A}(\vec{x}) = \frac{B}{2}\left(-y, x, 0\right), \tag{2}$$

con B una costante reale positiva.

(3) Si dimostri che l'hamiltoniana Eq. (1) con $\vec{A}$ dato dalla (2) può essere scritta nella forma

$$H_0 = H_\perp + \frac{p_z^2}{2m}, \tag{3}$$

dove

$$H_\perp = \frac{1}{2m}\left(p_x^2 + p_y^2\right) + \frac{1}{2}m\omega^2\left(x^2 + y^2\right) - \omega L_z, \tag{4}$$

p_x, p_y, p_z e x, y sono rispettivamente componenti degli operatori $\vec{p}$ e $\vec{x}$, la costante $\omega = \frac{B}{2m}$ e L_z è la componente lungo l'asse z del consueto operatore momento angolare orbitale canonico $\vec{L} = \vec{x} \times \vec{p}$. Si usi il risultato per determinare lo spettro dell'hamiltoniana $H_\perp$ e la sua degenerazione.

(4) Si supponga ora che la particella abbia spin $\frac{1}{2}$, e si aggiunga all'hamiltoniana un termine di spin:

$$H = H_\perp + H_S, \tag{5}$$

con

$$H_S = -\frac{1}{m}\vec{S} \cdot \vec{B}, \tag{6}$$

dove $\vec{B} = (0, 0, B)$ e $\vec{S}$ è l'operatore di spin. Si dimostri che H_S può essere scritta nella forma

$$H_S = \hbar\omega\left(b^\dagger b - \frac{1}{2}\right), \tag{7}$$

dove $b = \frac{1}{\hbar}\left(S_y - iS_x\right)$.

Suggerimento: rappresentare gli operatori di spin in termini di matrici di Pauli.

(5) Si dimostri che $bb^\dagger + b^\dagger b = 1$ e $b^2 = (b^\dagger)^2 = 0$ e si usi il risultato per determinare lo spettro dell'hamiltoniana H_S Eq. (7). Si determini quindi lo spettro dell'hamiltoniana H Eq. (5).

(6) Si supponga che al tempo $t = 0$ vengano misurate le componenti lungo gli assi y e z del vettore velocità $\vec{v}$. Si determini a quale tempo successivo t il sistema torna ad avere gli stessi valori di v_y e v_z usando le leggi del moto ricavate al punto (2) con l'espressione Eq. (2) di $\vec{A}(\vec{x})$.

(7) Si dimostri che gli operatori $x_c = x + \frac{v_y}{2\omega}$ e $y_c = y - \frac{v_x}{2\omega}$ sono costanti del moto e si interpreti il risultato in termini semiclassici (teorema di Ehrenfest).