ESAME SCRITTO DI FISICA MODERNA

13 Gennaio 2015

Traccia di soluzione

(1) Poniamo $\alpha = 1/(2\sigma^2)$, il valore medio di posizione è dato da

$$\langle x \rangle = \langle \psi | x | \psi \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \psi^*(x) x \psi(x) dx = \sqrt{\frac{\alpha}{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} x e^{-\alpha x^2} dx = 0\,, \tag{1}$$

mentre il valore medio dell'impulso è dato da

$$\langle p \rangle = \langle \psi | p | \psi \rangle = -i\hbar \int_{-\infty}^{\infty} \psi^*(x) \frac{\partial}{\partial x} \psi(x) dx = -i\hbar \sqrt{\frac{\alpha}{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \left[i k_0 e^{-\alpha x^2} - \alpha x e^{-\alpha x^2} \right] dx = \hbar k_0\,. \tag{2}$$

Il valore medio di p^2 è

$$\langle p^2 \rangle = \langle \psi | p^2 | \psi \rangle = \cdots = \hbar^2 \left(k_0^2 + \frac{\alpha}{2} \right). \tag{3}$$

L'indeterminazione in impulso al tempo $t = 0$:

$$\Delta^2 p = \langle p^2 \rangle - \langle p \rangle^2 = \frac{\alpha \hbar^2}{2} = \frac{\hbar^2}{4\sigma^2}\,. \tag{4}$$

(2) Le equazioni del moto alla Heisenberg sono

$$\frac{dx}{dt} = -\frac{i}{\hbar} [x, H] = \frac{p}{m}\,, \tag{5}$$

$$\frac{dp}{dt} = -\frac{i}{\hbar} [p, H] = g\,, \tag{6}$$

la cui soluzione è

$$p(t) = p(0) + gt\,, \tag{7}$$

$$x(t) = x(0) + \frac{t}{m} p(0) + \frac{gt^2}{2m}\,. \tag{8}$$

Il valori medi di posizione e impulso al tempo t sono

$$\langle x(t) \rangle = \langle x(0) \rangle + \frac{t}{m} \langle p(0) \rangle + \frac{gt^2}{2m} = \frac{\hbar k_0 t}{m} + \frac{gt^2}{2m}\,, \tag{9}$$

$$\langle p(t) \rangle = \hbar k_0 + gt\,, \tag{10}$$

mentre

$$\langle p^2(t) \rangle = \hbar^2 k_0^2 + \frac{\hbar^2 \alpha}{2} + 2\hbar k_0 g t + g^2 t^2\,. \tag{11}$$

L'indeterminazione in impulso al tempo t è quindi

$$\Delta^2 p(t) = \langle p^2 \rangle - \langle p \rangle^2 = \frac{\hbar^2 \alpha}{2}\,, \tag{12}$$

ed è quindi indipendente dal tempo.

(3) Abbiamo che

$$\langle p|H|p'\rangle = \langle p|\left(\frac{p^2}{2m} - gx\right)|p'\rangle = \frac{p^2}{2m}\delta(p-p') - g\int \frac{dx'}{2\pi} x' e^{-\frac{i}{\hbar}x'(p-p')} = \frac{p^2}{2m}\delta(p-p') - i\frac{d}{dp} g\delta(p-p')\,. \tag{13}$$

Il risultato è indipendente dal tempo, come si può vedere o sostituendo le leggi del moto Eq. (11)-(12), oppure osservando che l'hamiltoniana non diepnde dal tempo e quindi l'operatore di evoluzione temporale è

$$S(t,t_0) = \exp\frac{1}{i\hbar}H(t-t_0) \tag{14}$$

e quindi

$$S^{-1}(t,t_0)HS(t,t_0) = H. \tag{15}$$

L'indipendenza dal tempo di qualunque elemento di matrice dell'hamiltoniana è conseguenza del fatto che l'hamiltoniana è indipendente dal tempo e quindi la dinamica è invariante per traslazioni temporali.

(4) La densità di probabilità è data da

$$|\langle p_0|\psi(t=0)\rangle|^2 = \widetilde{\psi}(p_0, t=0)\,, \tag{16}$$

dove $\widetilde{\psi}(p_0, t=0)$ è la funzione d'onda al tempo t nello spazio degli impulsi. Quest'ultima si ottiene come trasformata di Fourier della funzione d'onda nello spazio delle posizioni:

$$\widetilde{\psi}(p, t=0) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{2\pi\hbar}} e^{-\frac{i}{\hbar}xp}\psi(x, t=0) = \cdots = \left(\frac{1}{\alpha\pi\hbar^2}\right)^{1/4} e^{-\frac{(p-\hbar k_0)^2}{2\alpha\hbar}} = \left(\frac{2\sigma^2}{\pi\hbar^2}\right)^{1/4} e^{-\sigma^2\left(\frac{p}{\hbar}-k_0\right)^2}, \tag{17}$$

che è anch'essa una gaussiana La funzione d'onda nello spazio degli impulsi appena prima della misura è quindi

$$\widetilde{\psi}(p, t=0) = \left(\frac{2\sigma^2}{\pi}\right)^{1/4} e^{-\sigma^2(p-\hbar k_0)^2} \tag{18}$$

mentre la funzione d'onda appena dopo la misura è

$$\widetilde{\psi}(p, t=0^+) = \langle p|p_0\rangle = \delta(p-p_0)\,. \tag{19}$$

(5) Scrivendo l'equazione di Schrödinger nello spazio degli impulsi si ottiene

$$\langle p|H|\psi_E\rangle = \left(\frac{p^2}{2m} - i\hbar g\frac{\partial}{\partial p}\right)\psi_E(p) = E\psi_E(p)\ , \tag{20}$$

da cui

$$\frac{\partial}{\partial p}\psi_E(p) = \frac{i}{\hbar g}\left(E - \frac{p^2}{2m}\right)\psi_E(p)\ , \tag{21}$$

che ha come soluzione

$$\psi_E(p) = N\exp\left[\frac{-i}{\hbar g}\left(\frac{p^3}{6m} - Ep\right)\right]\ , \tag{22}$$

con N un'opportuna costante di normalizzazione. Lo spettro di autovalori dell'energia è continuo.

(6) L'evoluzione temporale della funzione d'onda $\psi(p,0)$ è quindi, sviluppando su una base di autostati dell'energia,

$$\psi(p,t) = \langle p|\psi(t)\rangle = \int dE\, \langle p|\psi_E\rangle\langle\psi_E|e^{-\frac{i}{\hbar}Ht}|p_0\rangle = \int dE\, N \exp\frac{-i}{\hbar}\left[\frac{1}{g}\left(\frac{p^3}{6m} - Ep\right) + Et\right]\langle E|p_0\rangle, \quad (23)$$

dove abbiamo sfruttato il fatto che al tempo $t = 0$ il sistema è posto dalla misura nello stato $|p_0\rangle$ avente funzione d'onda nello spazio delle posizioni data dalla Eq. (16).

(7) Dal punto precedente, eseguendo la sostituzione $p' = p - gt$, si ha

$$\begin{aligned}
\psi(p,t) &= \exp\left[-i\,\frac{(p'+gt)^3 - p'^3}{6\hbar mg}\right]\int dE\, N \exp\left[\frac{-i}{\hbar g}\left(\frac{p'^3}{6m} - Ep'\right)\right]\langle\psi_E|p_0\rangle \\
&= \exp\left[-i\,\frac{(p'+gt)^3 - p'^3}{6\hbar mg}\right]\int dE\, \langle p'|\psi_E\rangle\langle\psi_E|p_0\rangle = \exp\left[-i\,\frac{(p'+gt)^3 - p'^3}{6\hbar mg}\right]\delta(p'-p_0) \\
&= \exp\left[-i\,\frac{(p_0+gt)^3 - p_0^3}{6\hbar mg}\right]\delta(p - gt - p_0) = e^{i\phi}\;\delta\left(p - (p_0+gt)\right)\,.
\end{aligned}$$

Il sistema al tempo t è differisce quindi per una pura fase

$$\phi = -\frac{(p_0+gt)^3 - p_0^3}{6\hbar mg} \quad (24)$$

dalla funzione d'onda in cui il sistema era dopo la misura, ma con quest'ultima valutata con p sostituito da p' nel suo argomento. Il sistema si trova quindi in un autostato dell'impulso a qualunque tempo t, corrispondente all'autovalore $p_0 + gt$. Il valor medio dell'impulso al tempo t è quindi

$$\langle p(t)\rangle = p_0 + gt\,, \quad (25)$$

mentre l'indeterminazione è nulla. Questo è coerente con le Eq. (7-8), che mostrano come il valor medio dell'impulso varia nel tempo secondo la legge del moto uniformemente accelerato, mentre l'indeterminazione dell'impulso non dipende dal tempo.