ESAME SCRITTO DI FISICA MODERNA

22 gennaio 2019

Traccia di soluzione

(1) Con semplici passaggi si ha che

$$\langle x \rangle = \int_{-\infty}^{-\infty} dx\, x\psi^*(x)\psi(x) = x_0\,, \tag{1}$$

$$\langle p \rangle = \int_{-\infty}^{-\infty} dx\, \psi^*(x)\left(-i\hbar\frac{\partial\psi(x)}{\partial x}\right) = -\hbar k_0\,, \tag{2}$$

$$\langle x^2 \rangle = \int_{-\infty}^{-\infty} dx\, x^2\psi^*(x)\psi(x) = x_0^2 + \frac{1}{4\sigma^2}\,, \tag{3}$$

$$\langle p^2 \rangle = \int_{-\infty}^{-\infty} dx\, \psi^*(x)\left(-\hbar^2\frac{\partial^2\psi(x)}{\partial x^2}\right) = \hbar^2(k_0^2+\sigma^2)\,, \tag{4}$$

$$\Delta^2 x = \frac{1}{4\sigma^2}\,, \qquad \Delta^2 p = \hbar^2\sigma^2\,. \tag{5}$$

(2) Scrivendo

$$\psi(x) = \left(\frac{2\sigma^2}{\pi}\right)^{1/4} e^{-ik_0x}e^{-(x-x_0)^2/(4\Delta^2 x)} \tag{6}$$

abbiamo che

$$\psi(k) = \int \frac{dx}{\sqrt{2\pi}} e^{ikx}\psi(x) = \cdots = \left(\frac{1}{2\pi\sigma^2}\right)^{1/4} e^{-ikx_0}e^{-(k+k_0)^2\hbar^2/(4\Delta^2 p)} \tag{7}$$

dove $p = \hbar k$, inoltre $H = p^2/(2m)$ da cui

$$\psi(k,t) = \langle k|\psi, t\rangle = \langle k|e^{-iHt/\hbar}|\psi\rangle = e^{-ik^2\hbar t/(2m)}\psi(k)\,. \tag{8}$$

(3) Si veda ad esempio il libro di testo Sez. (5.2.4).

(4) In rappresentazione di Heisenberg si ha che

$$\frac{dp}{dt} = -\frac{i}{\hbar}[p, H] = 0\,, \tag{9}$$

da cui

$$p(t) = p(0)\,, \quad \Delta^2 p(t) = \Delta^2 p(0) = \hbar\sigma^2\,. \tag{10}$$

Alternativamente in rappresentazione di Schrdinger nella base degli impulsi

$$\langle p \rangle = \int dk\, \langle\psi, t|k\rangle\langle k|p|\psi, t\rangle = \int dk\, \hbar k|\psi(k)|^2 = \int dk\, \hbar(k+k_0-k_0)\left(\frac{1}{2\pi\sigma^2}\right)^{1/2} e^{-(k+k_0)^2\hbar^2/(2\Delta^2 p)} = -\hbar k_0\,, \tag{11}$$

dove nell'ultimo passaggio abbiamo usato le proprietà di simmetria dell'integrale.

$$\Delta^2 p(t) = \langle (p - \langle p \rangle)^2 \rangle = \int dk\, \hbar^2 (k + k_0)^2 |\psi(k)|^2 = \cdots = \Delta^2 p\,. \tag{12}$$

(5) Nella base degli impulsi

$$\begin{aligned} \langle k|H|\psi\rangle &= \langle k| \left(\frac{\hbar^2 k^2}{2m} - \lambda \int dx dk'\, \delta(x) |x\rangle\langle x|k'\rangle\langle k'| \right) |\psi\rangle = \frac{\hbar^2 k^2}{2m} \psi(k) - \lambda \int dx dk'\, \delta(x) \frac{e^{-i(k-k')x}}{2\pi} \psi(k') \\ &= \frac{\hbar^2 k^2}{2m} \psi(k) - \frac{\lambda}{2\pi} \int dk' \psi(k') = E\psi(k)\,, \end{aligned} \tag{13}$$

poiché i coefficienti dell'equazione sono tutti reali la funzione d'onda $\psi(k)$ può essere scelta reale.

(6) Risolvendo l'equazione di Schroedinger nella base degli impulsi

$$\left(\frac{\hbar^2 k^2}{2m} - E \right) \psi(k) = \frac{\lambda}{2\pi} \int dk' \psi(k')\,, \tag{14}$$

abbiamo che

$$\psi(k) = \frac{\lambda}{2\pi} \frac{N}{\hbar^2 k^2/(2m) - E}\,, \tag{15}$$

dove abbiamo introdotto la costante

$$N = \int dk\, \psi(k) = \cdots = \frac{\lambda m N}{\hbar \sqrt{2m(-E)}}\,, \tag{16}$$

(dove abbiamo usato l'integrale notevole suggerito), da cui si ottiene

$$E = -\frac{m\lambda^2}{2\hbar^2}\,, \tag{17}$$

e quindi troviamo che esiste uno stato legato con energia avente la forma data nel testo, con

$$\kappa = \frac{\lambda}{\hbar}\,. \tag{18}$$

(7) Abbiamo che

$$\psi(k) = \int \frac{dx}{\sqrt{2\pi}} e^{-ikx} \psi(x) = \int \frac{dx}{\sqrt{2\pi}} e^{-i(k-k_0)x} \psi_E(x) = \psi_E(k - k_0)\,. \tag{19}$$

Il valor medio richiesto è quindi

$$\langle p \rangle = \int dk\, \hbar k |\psi(k)|^2 = \int dk\, \hbar k |\psi_E(k - k_0)|^2 = \int dk'\, \hbar(k' + k_0) |\psi_E(k')|^2 = \hbar k_0 \tag{20}$$

dove nell'ultimo passaggio abbiamo utilizzato la condizione di normalizzazione per $\psi_E(k)$ e la parità di $\psi_E(k)$.